COMMISSION DE REFLEXION SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

RAPPORT D'ETAPE SUR LE CALCUL

SOMMAIRE

I. INTRODUCTION

I.1 Pourquoi un rapport sur le calcul ?

La commission a décidé de faire du calcul un de ses thèmes de réflexion. Il y a à cela plusieurs raisons et, au moins, les trois suivantes.

La première est que le calcul est omniprésent dans les pratiques mathématiques, qu'il en est une composante essentielle à tous les niveaux, inséparable des raisonnements qui le guident ou qu'en sens inverse il outille mais que l'image qu'en véhiculent la culture et l'enseignement est profondément inadaptée, ceci ayant des effets négatifs sur l'image même des mathématiques.

La seconde est que, dans la période récente, le développement des technologies informatiques a profondément modifié les pratiques associées au calcul, tant les pratiques quotidiennes et sociales que les pratiques scientifiques. La plupart des algorithmes de calcul dont l'apprentissage occupait un temps important de la scolarité, notamment dans l'enseignement obligatoire, sont aujourd'hui implantés dans les calculatrices les plus simples. En revanche, le calcul pose des questions nouvelles liées notamment à la représentation informatique des objets mathématiques sur lesquels il porte (par exemple la représentation informatique des nombres), à la performance des algorithmes utilisés au delà de leur seule effectivité…, des questions qui n'étaient pas des enjeux de l'enseignement jusqu'ici. La puissance de calcul des nouveaux outils modifie aussi profondément l'économie du calcul et pose, dans des termes renouvelés, celle de la gestion des rapports entre calcul et raisonnement, en favorisant explorations, simulations, expérimentations.

La troisième est que l'évolution même du champ mathématique déplace les équilibres traditionnels en matière de calcul. Il suffit de penser par exemple à l'influence croissante des modélisations probabilistes, et donc des formes de calcul associées, dans les sciences mathématiques, influence qui s'étend de domaines ayant une longue histoire comme celui des équations différentielles ordinaires et équations aux dérivées partielles à des domaines plus récemment investis par les mathématiques comme l'économie, la finance et jusqu'à la modélisation du fonctionnement de la pensée humaine, comme le souligne par exemple le mathématicien D. Mumford, dans un article récent [1]. Cette évolution oblige l'enseignement des mathématiques à questionner ses équilibres traditionnels.

L'enseignement des mathématiques se trouve de ce fait, dans ses rapports au calcul, dans une phase de déstabilisation. On ne peut manquer de s'interroger sur ce que peut être, sur ce que doit être l'enseignement du calcul aujourd'hui, à la fois dans ses contenus et dans ses formes, compte tenu des besoins culturels, scientifiques et sociaux auxquels il doit répondre. C'est à la réflexion sur ces questions que la commission souhaite contribuer.

I.2 La structure du rapport :

Ce rapport articule :

- une réflexion de nature épistémologique sur le calcul et son évolution, qui sera mise en regard avec l'image traditionnelle du calcul dans la culture et dans l'enseignement,
- s'appuyant sur cette dernière, une réflexion de nature didactique sur les besoins de l'enseignement du calcul aujourd'hui et les moyens à mettre en œuvre pour les satisfaire,

- en mettant l'accent sur des continuités qui, dans la durée, marquent les enjeux de cet enseignement ; ces continuités sont essentielles pour penser de façon cohérente l'enseignement dans le long terme ;

- en mettant l'accent, en sens inverse, sur l'évolution des objets, des pratiques, des démarches de pensée du calcul au fil de la scolarité et sur les reconstructions que nécessitent, chez les élèves, ces évolutions ; l'enseignement y est, en effet, généralement trop peu sensible ;

- en analysant les difficultés que rencontre l'institution scolaire à mettre en place un rapport satisfaisant au calcul des élèves, étudiants et enseignants et donc à satisfaire ces besoins.

Il inclut également des références à des travaux d'innovation ou de recherche, menés en France ou à l'étranger, susceptibles de nourrir la réflexion et de fournir des pistes intéressantes d'action et il sera complété par une annexe regroupant quelques exemples servant à illustrer notre propos.

Précisons que la réflexion épistémologique ne vise en rien l'exhaustivité. Elle est centrée sur quelques caractéristiques qu'il nous semble essentiel de prendre en compte aujourd'hui dans une réflexion sur l'enseignement, vu les évolutions mentionnées, vu aussi les décalages existant entre la réalité de l'univers du calcul en mathématiques et la vision de cette réalité que proposent traditionnellement la culture et l'enseignement.

La réflexion didactique ne vise pas non plus l'exhaustivité. Nous nous y limitons aux formes principales que prend le calcul, des débuts de la scolarité élémentaire au premier cycle de l'enseignement supérieur (d'autres textes de la commission, notamment les rapports sur « Informatique et enseignement des mathématiques » et sur « Statistique et probabilités », complètent le présent rapport). Nous centrons de plus la réflexion sur quelques questions particulièrement sensibles pour l'enseignement du calcul aujourd'hui.

Notre ambition n'est pas de tracer une voie royale pour l'enseignement du calcul, de la maternelle à l'université : le calcul est multiforme, susceptible d'une diversité d'approches et un système d'enseignement a nécessairement des choix à effectuer au sein de cette diversité. Mais il importe que ces choix soient cohérents et pensés dans la durée, qu'ils composent, de façon réaliste, avec les diverses contraintes auxquelles l'enseignement est assujetti, sans pour autant se laisser dominer par elles, et sans renoncer trop facilement aux ambitions que l'on peut légitimement avoir pour l'enseignement des mathématiques. Notre réflexion a pour objet d'aider à penser ces choix.

II. QUELQUES CARACTERISTIQUES DU CHAMP DU CALCUL

Nous évoquons dans cette partie quelques caractéristiques du champ du calcul qu'il nous semble important de prendre en compte dans une réflexion sur l'enseignement. Ce sont les suivantes :

- l'omniprésence du calcul dans les pratiques mathématiques, la diversité croissante de ses facettes et des objets qu'il engage,
- la dépendance de l'évolution du champ et des pratiques mathématiques à l'égard des instruments du calcul,
- la dualité : calcul exact et calcul approché,
- les rapports entre calcul et construction des concepts mathématiques.

II.1 L'OMNIPRESENCE DU CALCUL ET LA DIVERSITE DE SES FACETTES

Le terme « calcul », comme chacun sait, vient du mot latin « calculus » qui renvoie aux cailloux que les romains utilisaient pour compter, dans des pratiques sociales diverses, et il est en priorité associé dans la culture aux calculs élémentaires sur les nombres intervenant dans le dénombrement de quantités discrètes et la mesure de grandeurs. En fait, il renvoie, en mathématiques, à une réalité beaucoup plus complexe. Il concerne, au-delà des seuls nombres, les objets mathématiques les plus divers, comme en témoignent les adjectifs susceptibles de le qualifier, renvoyant à des objets géométriques ou mécaniques (calcul barycentrique, calcul vectoriel, calcul tensoriel…), à des objets fonctionnels et probabilistes (calcul différentiel et intégral, calcul des variations, calcul stochastique…), voire à des énoncés logiques (calcul propositionnel, calcul des prédicats…). Chaque type de calcul, ainsi dénommé, s'accompagne de modes de pensée, de techniques spécifiques, faisant du calcul un objet multiforme.

Ces caractéristiques nous semblent importantes à souligner, d'une part parce que, au delà de la mise en place des instruments élémentaires du calcul numérique et algébrique, le système éducatif a sans aucun doute à faire des choix dans cette diversité, d'autre part parce que le passage d'une forme de calcul à une autre ne va pas de soi, même lorsque ces calculs partagent un certain nombre d'objets et d'expressions symboliques. C'est le cas notamment entre arithmétique et algèbre, algèbre et analyse. L'enseignement n'est sans doute pas assez sensible aux difficultés résistantes qui en résultent pour beaucoup élèves et sur lesquelles nous reviendrons notamment dans les paragraphes consacrés au calcul algébrique et fonctionnel.

Le calcul numérique élémentaire, lui-même, reflète cette diversité. Il dépend des nombres en jeu et des systèmes de représentations choisis pour ces nombres. On sait l'influence qu'a eu historiquement sur son développement le passage à la numération indienne, l'invention des écritures décimales. Il dépend aussi des outils (tables, bouliers, abaques, calculatrices,…) qui l'instrumentent. Ainsi, aujourd'hui, les élèves peuvent rencontrer très tôt, grâce aux calculatrices, de longues écritures décimales, un calcul sur les puissances de 10, qui étaient autrefois l'apanage des scientifiques et des ingénieurs. Le calcul algébrique, historiquement d'abord lié à la résolution d'équations, partage de nombreux signes avec le calcul numérique. Mais l'utilisation de lettres pour représenter des nombres le rend déjà profondément différent. Sa spécificité se renforce quand, avec les travaux de Fermat et Descartes, il s'étend à la géométrie, pour permettre de calculer sur des points du plan et de l'espace via leurs coordonnées. Puis, progressivement, ce calcul algébrique investit les objets les plus divers, les lettres représentant des fonctions, des opérations, comme dans toute l'algèbre moderne, et dans une bonne partie de l'analyse, dont le calcul symbolique est la face algébrisée. Le calcul fonctionnel est ainsi, pour une part, une algèbre et la puissance du calcul algébrique s'y exprime dès l'origine, relayée par des notations comme les notations différentielles où se manifeste le génie de ses fondateurs. Mais ce calcul, par ses problématiques et ses développements, se démarque radicalement de l'algèbre. Les fonctions expriment la variation et le mouvement, présents dans de nombreux phénomènes naturels. Vitesse, accélération, détermination de trajectoires ou d'orbites, sont les paradigmes des dérivées premières et secondes, de l'intégration des équations différentielles. Une bonne part du calcul scientifique des XVIIIème et XIXème siècles est liée à l'astronomie et à la mécanique céleste. Des outils de ce calcul comme les séries de Fourier, les fonctions spéciales, vont devenir des objets d'étude et des procédés de calcul vont engendrer des théories comme la théorie de l'approximation. Et, avec le développement de l'analyse fonctionnelle du XXème, ce calcul à son tour va se géométriser, les fonctions devenant des points dans des espaces fonctionnels, les approximations étant interprétées en termes de distances dans des espaces métriques.

Existe-t-il une unité qui transcende en un certain sens cette évidente diversité ? Pouvons-nous, en cherchant à l'identifier, délimiter mieux cet objet qui semble omniprésent dans les pratiques mathématiques et en percevoir certaines caractéristiques fondamentales, que l'enseignement se devrait de rendre sensibles et de transmettre ?

Une part essentielle du travail mathématique consiste, pour résoudre des problèmes internes ou externes au champ mathématique, à rendre des « objets » accessibles au calcul, à développer les techniques de ce calcul, à les organiser au sein de théories dont le développement influera en retour sur le calcul. Rendre des objets accessibles au calcul suppose un travail de modélisation, permettant de privilégier quelques caractéristiques de ces objets tout en en occultant une multitude d'autres, pour aboutir à une représentation calculable. Ce travail est présent dès les premiers contacts avec le monde du calcul, qu'il s'agisse d'associer un nombre à une collection discrète d'objets en oubliant les caractéristiques propres de ces objets qui n'entreront pas en jeu dans le calcul ou d'associer des grandeurs telles que longueurs, aires, angles à des formes géométriques.

Pour calculer sur des objets d'un ensemble X, on en construira en fait une représentation f dans un ensemble A qui, dans les cas les plus simples, sera un anneau de nombres ou un espace vectoriel mais pourra correspondre à des structures plus complexes[1]. L'application f aura aussi à charge de permettre de traduire en opérations sur A des opérations jugées fondamentales sur les objets de X (la réunion de deux collections disjointes se traduira par la somme de leurs cardinaux, l'intersection de deux courbes algébriques planes par la multiplication de leurs degrés…)[2].

Il importe sans doute de faire sentir aux élèves, au fil de la scolarité et de l'enrichissement progressif de leur univers mathématique, l'unité qui préside ainsi à l'entrée d'objets divers dans le domaine du calcul. Dès l'école élémentaire, le travail sur les nombres et les grandeurs, partant d'objets matériels, en constitue un premier exemple paradigmatique.

Une autre caractéristique essentielle du calcul réside dans le travail d'automatisation auquel il est associé. La puissance du calcul mathématique s'exprime par la diversité des objets qu'il permet d'atteindre, elle s'exprime aussi par la possibilité de son automatisation. On pourrait être tenté, pour essayer de délimiter plus clairement le champ du calcul, de limiter l'acception de ce terme à ce qui est calcul automatisable. Dans la perspective qui est la nôtre ici de réflexion sur l'enseignement du calcul, ceci ne nous semble pas judicieux, car susceptible de renforcer l'opposition calcul / raisonnement, si préjudiciable à l'enseignement. Nous garderons donc un sens large au terme de calcul, considérant que, même si bon nombre de calculs qui relèvent pour l'élève d'un calcul raisonné, peuvent être automatisés, le travail sur le calcul va comporter deux facettes :

- une facette qui renvoie à l'ambition d'automatisation du calcul,

[1] En géométrie algébrique, par exemple, le calcul de Schubert est basé sur l'association à chaque variété projective, de sa classe, qui vit dans un anneau, dénommé anneau de Chow. L'intersection des variétés se traduit par un produit dans cet anneau. Dans le cas le plus simple, celui du théorème de Bézout sur les courbes planes énonçant que deux courbes planes de degrés d et d' en position générale ont dd' points d'intersection, on associe à une courbe C son degré qui est un élément de l'anneau Z.

[2] Si l'on dispose de plus d'un théorème fondamental associé à cette représentation qui permette d'expliciter les fibres de f (c'est à dire de caractériser les classes d'équivalence associées à f), alors on disposera d'un calcul qui permettra non seulement de calculer sur les objets de X mais aussi d'établir des propriétés des X, via le calcul dans A. C'est le cas, par exemple, si l'on considère les polygones plans et la représentation en termes d'aires puisque l'on dispose du théorème fondamental suivant : deux polygones ont même aire s'ils se déduisent l'un de l'autre par découpage et recollement, mais ce n'est plus vrai, pour les polyèdres de l'espace.

- une facette qui renvoie à un calcul raisonné, qui peut être éventuellement guidé par des méthodes mais n'est pas automatisable ou que l'on ne cherche pas à automatiser.

La première facette comporte elle-même deux volets : d'une part, l'élaboration de cette automatisation via la construction d'algorithmes de calcul, la preuve de leur validité, l'analyse de leur complexité et l'amélioration éventuelle de leur efficacité, d'autre part, celle de la maîtrise de l'exécution et de l'exploitation de ces algorithmes. Elle a joué de tout temps un rôle essentiel dans le développement mathématique, comme en témoigne l'ouvrage « Histoire d'algorithmes, du caillou à la puce » édité par la commission inter-IREM Epistémologie et histoire des mathématiques [2]. L'enseignement, comme nous le soulignions au départ, a consacré traditionnellement beaucoup de son énergie au second volet et, en particulier, à la maîtrise de l'exécution des algorithmes. L'évolution des moyens de calcul aujourd'hui oblige à repenser les équilibres. Ce point sera développé ultérieurement, mais nous voudrions dès à présent insister sur deux points :

- la nécessité de renforcer le premier volet, dans l'enseignement du calcul, sans occulter les questions d'effectivité des algorithmes construits,
- la nécessité de mettre mieux en évidence ce qu'apporte l'automatisation du calcul. Cet apport est aujourd'hui beaucoup plus facile à faire sentir que dans le passé où, même lorsqu'un algorithme était mis en place, son exécution à la main restait coûteuse. L'implémentation des algorithmes en machine modifie radicalement l'économie du calcul. Un algorithme étant implanté, il nous semble essentiel de profiter du faible coût d'exécution pour mettre en évidence son impact sur la résolution de problèmes, pour explorer, avec son aide, de nouvelles situations. Trop souvent dans l'enseignement, l'implémentation de l'algorithme en machine, quand on arrive jusque là, semble être l'omega de la démarche, alors même que de nouveaux champs de problèmes deviennent accessibles grâce à lui, que la maîtrise de son usage supposerait que l'on soit capable de l'adapter à des situations voisines, et non seulement de l'exécuter[3].

En fait, tout calcul un peu complexe, imbrique, dans une subtile alchimie dépendant bien sûr des contextes et des connaissances disponibles, des moments où le calcul se raisonne et des moments où le calcul s'automatise, comme nous l'illustrerons en annexe.

La seconde facette du calcul, celle du calcul raisonné, est donc tout aussi essentielle. Le calcul y est souvent stratégique, méthodique, à défaut d'être automatisé. Ainsi en est-il, par exemple, souvent pour l'élève, du calcul vectoriel qui soutient ses démonstrations géométriques dans le secondaire. Les outils de ce raisonnement, même s'ils puisent souvent dans un fond commun de calcul numérique et algébrique, sont divers et étroitement dépendants des domaines concernés. La reconnaissance de formes, la recherche d'analogies, mais aussi le jeu sur les variations possibles, le sens des ordres de grandeur, le sens des expressions manipulées, sur lesquels nous reviendrons ultérieurement jouent un rôle clef dans ce pilotage raisonné que l'on désignera globalement comme « intelligence du calcul ». Développer cette intelligence du calcul qui seule permet de faire face aux situations non routinières, se doit d'être une ambition majeure de l'enseignement du calcul, quels que soient les objets sur lesquels il porte. Elle suppose bien sûr que l'enseignement n'enferme pas l'apprentissage du calcul dans celui d'un certain nombre de routines, qu'il sache mettre en évidence son caractère problématique dans des situations non balisées et armer les élèves pour l'approcher. Nous illustrerons ceci par divers exemples dans la suite du rapport et en annexe.

---

[3] Par exemple, l'arithmétique a été réintroduite dans l'enseignement secondaire avec l'ambition d'en faire un terrain privilégié pour le développement de démarches algorithmiques. Il semble bien que ce ne soit pas vraiment le cas jusqu'ici.

Nous avons jusqu'ici souligné l'omniprésence du calcul dans les pratiques mathématiques, sa puissance, sa diversité. Suivant les objets sur lesquels il portera, les problèmes qu'il servira à résoudre, il sera exact ou approché, déterministe ou probabiliste, il renverra à des processus finis ou infinis. Il ne sera cependant pas tout puissant. Il importe de faire aussi sentir aux élèves les limites du calcul, en les amenant à distinguer entre différents types de limites : limites liées à des résultats d'impossibilité comme ceux concernant la résolution générale par radicaux des équations algébriques de degré supérieur ou égal à cinq ou la résolution par quadratures de la grande majorité des équations différentielles[4], limites liées à des raisons de complexité, limites liées à des phénomènes d'instabilité, par exemple. Mais il sera tout aussi important de montrer, comme le soulignait déjà Evariste Galois, que lorsque les calculs sont théoriquement impossibles ou lorsqu'ils le deviennent pratiquement pour des raisons diverses, le mathématicien n'est pas pour autant définitivement démuni. Un changement de regard sur les objets peut permettre de les approcher autrement. Ainsi en fut-il historiquement de la théorie des équations de Galois, de l'étude qualitative des équations différentielles initiée par Poincaré, plus récemment de l'instabilité à travers la théorie du chaos. Ces nouvelles approches peuvent, à leur tour, conduire à engager les objets dans d'autres types de calcul. Par ailleurs, des résultats théoriques et les nouvelles stratégies de calcul qu'ils autorisent peuvent ramener dans le champ du calcul accessible des questions qui paraissaient hors de son champ. Ainsi le calcul est-il à la fois instrument et moteur du travail mathématique.

II.2 LE CALCUL ET LE RAPPORT DES MATHEMATIQUES AU « REEL »

C'est via le calcul que s'expriment et se développent de façon privilégiée les rapports entre mathématiques et autres secteurs scientifiques, entre mathématique et « réel ». Ceci est évident par exemple dès les débuts du calcul différentiel et intégral, et notamment dans les travaux de Newton, dans les méthodes de calcul élaborées par Lagrange et Laplace pour l'étude des orbites planétaires et des trajectoires des comètes, dans le calcul des erreurs et la géodésie, dans la théorie analytique de la chaleur et les séries de Fourier.

Le cas de la géodésie, comme le montre la thèse de M.F. Jozeau [3], est intéressant à plus d'un titre. D'une part, c'est dans ce contexte que s'effectue essentiellement le passage d'un traitement empirique contrôlé par des techniques différentielles à un traitement statistique et probabiliste des erreurs de mesure dans les calculs, d'autre part, l'histoire de ce passage illustre particulièrement bien la complexité des rapports entre mathématiques et « réel », entre théories et pratiques de calcul. C'est en effet au début du XIXème siècle que les pratiques de triangulation, initiées au siècle précédent, notamment en France, se généralisent à toute l'Europe, pour répondre à des questions théoriques concernant la forme de la terre mais aussi pratiques nées de besoins politiques, militaires et économiques. Chaque pays procède de façon isolée, mettant en jeu des méthodes différentes de gestion des erreurs. La France, bien que Legendre et Laplace aient été avec Gauss, les initiateurs de la méthode des moindres carrés, donne le primat à la qualité des observations et à une répartition empirique des erreurs. Il faut souligner que la dimension pratique de la mise en œuvre de cette méthode pour le traitement des erreurs n'a pas été prise en charge par les théoriciens : il n'y a pas de notations adaptées, pas d'algorithmisation des calculs à mener. La complexité de ces calculs effraie les praticiens et Le Verrier interdit même l'enseignement de la méthode des moindres carrés à l'Ecole Polytechnique dans la réforme de 1850. La situation est tout à fait différente en

---

[4] Précisons que la notion d'impossibilité est ici relative aux opérations que l'on s'autorise à effectuer. Ainsi, Hermite a donné des formules exactes pour les racines d'une équation algébrique de degré 5 en utilisant les fonctions elliptiques et Poincaré a intégré de manière exacte les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients algébriques en utilisant les fonctions fuchsiennes.

Allemagne où Gauss, qui participe activement à la triangulation du Hanovre, s'est engagé dans ce travail de mise en place de techniques efficaces de calcul associées à la méthode. Sous son influence, des efforts de vulgarisation sont entrepris et le traitement des erreurs de triangulation y est pensé de façon statistique et probabiliste via la méthode des moindres carrés et ceci a des effets en retour sur les techniques de mesure elles-mêmes. Il faut en effet développer des techniques assurant, pour justifier l'utilisation de la méthode, l'élimination des erreurs constantes et l'indépendance des observations. Lorsque se posera la question du raccordement international de toutes ces triangulations locales et de la compensation des erreurs sur les différents réseaux pour permettre un raccordement acceptable aux frontières, une association géodésique internationale sera créée (en 1864) et la méthode allemande sera retenue pour la triangulation fondamentale, dite du premier ordre (par mailles de 40km).

Aujourd'hui, l'aventure des ondelettes, nées de la physique et de la recherche pétrolière, développées en théories mathématique autonome, et appliquées maintenant non seulement à l'analyse du signal mais aussi à la synthèse et à la transmission d'images, ainsi qu'à l'élaboration de modèles statistiques, constitue sans aucun doute l'exemple paradigmatique de la manière dont les nouvelles méthodes de calcul se créent, se perfectionnent, et s'appliquent parfois de manière imprévue [4], [5].

C'est ainsi par l'intermédiaire de modèles mettant en jeu du calcul, tant au niveau de la conception, du traitement que de la validation, que les mathématiques nouent depuis toujours leurs rapports au réel. Elles interviennent aujourd'hui dans les secteurs les plus divers pour l'étude de systèmes non seulement physiques, mais aussi biologiques, économiques, financiers, sociaux, pour la production technologique, même si les mathématiques engagées dans cette production nous restent généralement invisibles. L'accélération de la pénétration par le calcul, sous des formes de plus en plus sophistiquées, des différentes sphères de l'activité scientifique et sociale est sans nul doute une autre caractéristique forte du monde du calcul aujourd'hui (on pourrait citer par exemple le cas de l'activité médicale, de l'activité financière, se référer aussi, pour la sophistication croissante des outils de calcul mobilisés, à la recherche biologique). Cette accélération résulte d'avancées théoriques mais elle est aussi étroitement liée à l'évolution des instruments et pratiques du calcul permise par le développement informatique. Grâce à ce développement, des systèmes de plus en plus complexes deviennent accessibles au traitement numérique et formel, à la simulation et les interfaces permettent des visualisations de plus en plus efficaces des résultats des traitements effectués. La précision accrue des calculs oblige d'ailleurs à s'interroger aujourd'hui sur l'adéquation de modèles qui avaient été conçus pour fonctionner dans des environnements de calcul moins performants. Dans le même temps, comme nous le soulignions au départ, les modélisations probabilistes, longtemps perçues comme à la marge des mathématiques, prennent une importance croissante, y compris dans des domaines anciennement mathématisés de façon déterministe.

Diversification des champs d'action du calcul hors des mathématiques, importance corrélative du travail de modélisation, sophistication croissante des notions et théories mathématiques engagées, évolution des équilibres traditionnels entre calcul déterministe et calcul probabiliste, toutes ces caractéristiques ne peuvent manquer d'avoir des répercussions sur l'enseignement du calcul, en particulier au-delà de la scolarité obligatoire. La sophistication croissante des théories mathématiques engagées, malgré l'existence de produits de calcul scientifique qui « encapsulent » les connaissances mathématiques et fournissent des algorithmes de traitement effectifs, pose néanmoins un certain nombre de questions. Quel doit être l'enjeu de la formation mathématique dans ce contexte ? Quelles connaissances sont nécessaires à une pratique intelligemment assistée par ces instruments de calcul ? Comment rendre ces connaissances accessibles aux publics visés par l'enseignement, notamment

lorsqu'il s'agit de formations professionnelles s'adressant à des publics dont la formation mathématique, voire scientifique, reste forcément très limitée ?

II.3 La dependance du champ a l'egard des instruments de calcul

Nous avons évoqué dans les paragraphes précédents le rôle du développement des technologies informatiques sur le calcul et, à travers le calcul, sur les mathématiques elles-mêmes. De tout temps, l'élaboration des concepts mathématiques a dépendu des instruments matériels et symboliques du calcul. Nous avons déjà évoqué dans ce rapport les évolutions permises par l'adoption de la numération arabe et du système décimal, par la mise en place de l'écriture symbolique algébrique, on ne saurait non plus oublier les évolutions permises par l'invention des logarithmes, ni le rôle joué par les tabulations de fonctions dans le développement de l'analyse. On ne saurait également oublier les instruments tant mécaniques (appareils pour tracer des courbes, résoudre des équations, planimètres, intégraphes…) que graphiques dont s'est doté le calcul (abaques, nomogrammes…), ni bien sûr la règle à calcul, matérialisation graphique des tables de logarithmes[5]. Ces instruments ont eu une importance considérable pour les scientifiques et les ingénieurs jusque dans les années 70, et l'apprentissage était pris et est toujours pris en charge, pour certains d'entre eux, notamment les abaques, par l'enseignement technique.

Mais aujourd'hui, c'est à travers le développement d'outils logiciels que s'effectue essentiellement l'instrumentation du calcul. L'activité mathématique est, de plus en plus, pour le professionnel, une activité assistée par des outils de calcul scientifique, qu'il s'agisse d'outils à vocation généraliste de calcul numérique et/ou formel ou d'instruments spécifiques à tel ou tel type de travail mathématique, comme par exemple les logiciels statistiques. Le développement de ces instruments façonne à son tour le rapport au calcul du monde mathématique, en modifiant substantiellement les pratiques et stratégies de calcul, en renforçant les approches algorithmiques et constructives, en conduisant au développement de nouvelles théories comme celle de la complexité. Ce n'est pas un hasard si le calcul scientifique apparaît aujourd'hui comme une spécialité mathématique à part entière.

Nous n'insisterons pas plus ici sur ces caractéristiques de l'évolution qui sont décrites de façon détaillée dans le rapport « Informatique et enseignement des mathématiques » de la commission, auquel nous renvoyons le lecteur. Il est clair que cette évolution des pratiques mathématiques et scientifiques ne peut être sans effet sur l'enseignement du calcul et nous reviendrons sur ce point ultérieurement.

II.4 La complementarite calcul exact – calcul approche

Le monde du calcul, nous l'avons déjà souligné, est un monde multiforme. C'est aussi un monde où s'entrecroisent deux grands types de calcul : le calcul exact et le calcul approché. Calcul exact et calcul approché sont deux facettes complémentaires du calcul dont les liens se tissent tout au long de son histoire. Il y a là une continuité majeure susceptible d'aider à structurer l'enseignement et nous souhaitons lui accorder une importance toute particulière dans ce rapport.

Peut-être, la considération d'un exemple aidera-t-elle à mieux percevoir la complémentarité de ces deux facettes. Nous avons choisi celui du calcul fonctionnel, plus particulièrement à travers l'histoire de la résolution des équations différentielles ordinaires, en nous appuyant

[5] Pour une histoire du calcul graphique, on pourra se référer à [6].

principalement sur la thèse de D. Tournès [7]. Il nous servira également à illustrer le rôle, précédemment évoqué, des instruments de calcul dans l'évolution.

Dès le début du développement de ce domaine, se conjuguent résolution exacte ou explicite et résolution approchée. La résolution exacte cherche à déterminer les fonctions inconnues par un nombre fini d'équations où n'interviennent, en nombre fini, que les opérations algébriques usuelles et les fonctions transcendantes exponentielles et circulaires (on dit alors que l'on ramène l'intégration « à la quadrature du cercle et de l'hyperbole »). On identifie les grandes classes d'équations permettant une résolution exacte et on explicite les méthodes de résolution associées. D'Alembert montre que l'intégration exacte est possible pour les fractions rationnelles mais il faut attendre les travaux de Condorcet, Laplace et Liouville pour disposer réellement d'une théorie de l'intégration en termes finis. En 1834, Liouville démontre le théorème-clé de la théorie : Si *y* est une fonction algébrique de *x*, et si $\int y\,\mathrm{d}x$ s'exprime sous une forme finie explicite, alors on peut écrire

$$\int y\,\mathrm{d}x = t + A\log u + B\log v + \ldots + C\log w,$$

où *A*, *B*, …, *C* sont des constantes et *t*, *u*, *v*, …, *w* des fonctions algébriques de *x*.[6]

Au moyen de ce théorème et de ses généralisations, Liouville réussit à prouver qu'un grand nombre d'intégrales, comme $\int \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$ ou certaines intégrales elliptiques, ne peuvent pas s'exprimer en termes finis. En 1841, il montre enfin que la fameuse équation de Riccati $y' + ay^2 = bx^m$ ne peut être résolue ni en termes finis ni par quadratures (c'est à dire en s'autorisant de plus des primitivations en nombre fini), en dehors des quelques cas déjà connus auparavant, c'est-à-dire $m = -4i/(2i \pm 1)$, où *i* est un entier naturel.

A partir de 1841, la théorie restera en sommeil, peut-être parce qu'elle ne débouche pas sur un algorithme explicite d'intégration et sert essentiellement à prouver des résultats négatifs. Par ailleurs, pendant la seconde moitié du 19ème siècle, les recherches sur les équations différentielles changent d'orientation : on s'intéresse davantage à des théorèmes généraux d'existence, à l'intégration par les séries, à des méthodes d'intégration numérique et, à partir de Poincaré, à une approche géométrique qualitative. La théorie sera revitalisée au milieu du 20ème siècle avec les travaux de Ostrowski (1946) et Ritt (1948). En 1968, Rosenlicht en donne une exposition purement algébrique, en introduisant le cadre abstrait d'un corps différentiel[7]. Dans ce cadre, Risch, en 1969, met au point un algorithme général pour décider si une fonction, élémentaire sur un corps différentiel, admet une primitive élémentaire et, si oui, pour la calculer. Depuis, diverses recherches ont été développées pour améliorer

---

[6] La formulation originale est la suivante : Soit P=f(x,y,z,…) une fonction algébrique de la variable x et de fonctions de x solutions d'équations y'=fonction algébrique de x,y,z,…, z'=fonction algébrique de x,y,z,… Si ∫Pdx est exprimable, sous forme finie, en fonction de x,y,z,… à l'aide des signes algébriques, exponentiels et logarithmes, alors ∫Pdx=t+Alogu+Blogv+…+Clogw, où A,B,…,C sont des constantes et t,u,v,…,w sont des fonctions algébriques de x,y,z…

[7] Un corps différentiel est un corps K muni d'une dérivation : x→x' vérifiant les propriétés : (x+y)'=x'+y' et (xy)'=x'y+xy', dans lequel les éléments de dérivée nulle sont appelés les constantes et forment un sous-corps. On définit les notions de fonction algébrique, exponentielle ou logarithme sur K. Une fonction est élémentaire sur K si elle appartient à un corps engendré par K et par un nombre fini de fonctions algébriques, exponentielles ou logarithmes sur K. Les fonctions élémentaires de l'analyse sont ainsi des fonctions élémentaires sur le corps des fractions rationnelles. En partant du corps des fractions rationnelles et d'une fonction élémentaire, on obtient de nouvelles fonctions élémentaires, telles que exp(exp(x)) et on dispose ainsi de toute une algèbre de fonctions élémentaires.

l'algorithme de Risch et pour l'implanter dans divers systèmes de calcul formel. On a aussi cherché à l'étendre en incluant dans l'intégration certaines classes de fonctions spéciales (fonction d'erreur, intégrales de Fresnel, logarithme intégral…). Il est clair que le développement d'instruments de calcul formel n'est en rien étranger à ce renouveau.

La résolution approchée s'est développée parallèlement à la résolution exacte. Si, à l'origine, la résolution exacte est en effet considérée comme un but, pratiquement, la détermination des solutions passe le plus souvent par des calculs approchés.

Le jeu qui se développe alors entre exact et approché est parfaitement illustré par exemple par Laplace. S'inspirant de Lagrange dans sa théorie des perturbations des comètes, et considérant l'orbite de la comète comme une ellipse sans cesse variable, il écrit dans l'introduction du tome IV de sa Mécanique Céleste : « chaque élément elliptique est alors exprimé par l'intégrale d'une fonction différentielle, et l'analyse donne divers moyens pour avoir cette intégrale de façon très approchée. Je présente ici ces fonctions différentielles, sous la forme qui m'a paru le plus commode, et je donne un moyen très-exact de les intégrer par approximation ». Et, toujours dans le cadre de la mécanique céleste, c'est pour les besoins d'un calcul approché aussi précis que l'on veut que Poincaré introduira les développements asymptotiques dont les physiciens font toujours grand usage[8].

La méthode la plus simple d'intégration approchée des équations différentielles, connue aujourd'hui sous le nom de méthode d'Euler, est en fait inséparable des origines du calcul infinitésimal et de la conception d'une courbe comme un polygone à une infinité de côtés infiniment petits. Euler est le premier à en rédiger un exposé complet sous une forme purement numérique mais, pour ses travaux appliqués de balistique et mécanique céleste, il ne l'utilise pas : elle est trop peu précise et il imagine des méthodes d'ordre 2, variantes de la méthode des trapèzes. Elle servira en revanche à Cauchy pour démontrer un des premiers grands théorèmes d'existence et d'unicité de l'analyse. Cette démonstration en retour fournit a posteriori une évaluation de l'erreur commise en utilisant la méthode d'Euler et, à la suite des travaux de Lagrange et Cauchy, l'idée fait peu à peu son chemin qu'un calcul numérique approché n'a de valeur scientifique que s'il est accompagné d'une estimation de l'erreur.[9]

En fait, les méthodes d'ordre 1 et 2 seront peu utilisées, étant peu précises, excepté en balistique. Elles seront améliorées pour aboutir aux méthodes connues aujourd'hui sous le nom de méthodes de Runge-Kutta dont Kutta fait une présentation générale en 1901. Les astronomes en particulier, préfèreront recourir aux méthodes multipas. Ces méthodes, qui font intervenir les valeurs de la fonction en n points successifs de subdivision, et sont basées sur l'utilisation du polynôme d'interpolation de Lagrange exprimé à l'aide de différences finies régressives et de la série d'interpolation de Gregory-Newton, sont en effet mieux adaptées aux techniques de calcul à la main de l'époque. Elles ne font intervenir que des calculs d'addition

---

[8] Une série divergente $A_0+A_1/z+\ldots+A_n/z^n+\ldots$ est un développement asymptotique de f(z) (pour $\arg(z) \in A$ donné) si, pour tout n, $\lim_{z\to\infty} z^n(f(z)-(A_0+A_1/z+\ldots+A_n/z^n))=0$. Un exemple classique est le développement $\sum_{n>0}(-1)^{n-1}(n-1)!/x^n$ pour $f(x)=\int_x^\infty t^{-1}e^{x-t}dt$ pour lequel $|f(x)-S_n(x)|\leq 1/n^2 2^{n+1}$ pour $x\geq 2n$.

[9] Précisons que les estimations théoriques d'erreurs basées sur des majorations des normes des dérivées successives sont pratiquement inutilisables dans la plupart des cas. D'une part, fréquemment, on ne sait même pas évaluer ces dérivées, par exemple si la dynamique est évaluée en faisant tourner un programme complexe, ce qui est un cas typique, d'autre part, les bornes fournies, quand on sait les calculer, sont excessivement pessimistes. On peut néanmoins évaluer les deux types d'erreurs : de méthode, due à la discrétisation, et d'arrondi, en étudiant la sensibilité par rapport au pas h (ce qui permet d'évaluer l'ordre de la méthode) et celle par rapport aux conditions initiales, qui permet de vérifier l'estimation de l'horizon sur lequel l'erreur reste acceptable. Ceci conduit à développer des méthodes à pas variable consistant à réduire ou augmenter le pas suivant les résultats des évaluations locales.

– soustraction sur les valeurs tabulées de fonctions élémentaires et, de plus, les mêmes calculs de différences servent dans plusieurs évaluations successives. Pourtant, avec l'apparition des premiers calculateurs, qui avaient de toutes petites mémoires (4 pour les premières machines), la situation s'inverse soudain : ce qui pose maintenant problème, c'est le stockage des résultats intermédiaires. D'où la régression des méthodes multipas et l'implantation généralisée des méthodes de Runge-Kutta. Le passage du calcul à la main au calcul sur ordinateur va ainsi susciter un temps des travaux visant à minimiser le nombre de calculs intermédiaires à garder en mémoire. Il va aussi mettre en évidence l'instabilité des méthodes multipas que l'on gérait localement dans les calculs à la main. Au début des années 60, la recherche sur l'intégration numérique semble close, mais elle est relancée une fois de plus par l'évolution des instruments de calcul et la complexité croissante des systèmes que le calcul prend en charge. Ainsi, par exemple, en est-il de la recherche d'algorithmes parallèles, visant à gérer de façon efficace les besoins liés aux simulations en temps réel.

De manière générale, dans le domaine fonctionnel, l'évolution des instruments de calcul liée à l'informatique a d'abord favorisé le calcul approché. Comme l'exprimait dès 1947, J.B.S. Haldane, biologiste et statisticien, dans une conférence à l'ENS de Sêvres, résoudre des équations fonctionnelles, « ce n'est plus se ramener aux fonctions tabulées mais donner un procédé de construction rapide, de représentation ou de calcul utilisant les capacités de la machine ». La transformée de Fourier rapide (FFT) est l'exemple paradigmatique d'un tel algorithme rapide et puissant, aux usages divers. Elle repose sur la vision discrète des séries de Fourier : séries de Fourier sur un groupe cyclique, mettant bien en évidence le rôle clef fondamental joué par le calcul discret dans l'étude des processus continus. C'est dans un second temps, avec le développement du calcul formel, à partir des années 60, que l'informatique va participer au développement du calcul fonctionnel exact, conduisant à revivifier et préciser la notion de fonction élémentaire et, à travers elle, le calcul exact.

<u>Le calcul formel :</u>

Ce calcul formel est en effet un calcul exact, non limité par une précision fixée, la seule limite étant la limite de la mémoire de la machine [8]. Aujourd'hui, il met à la disposition de tous des logiciels qui effectuent automatiquement les calculs usuels sur les fonctions : dérivation, développements limités, intégrales, intégration d'équations différentielles... Ainsi, des calculs astronomiques qui, au XIXème siècle, ont nécessité une organisation du travail industrielle et des dizaines d'années, se font maintenant en quelques heures grâce aux logiciels de calcul formel actuels.

Le calcul formel exerce une influence importante sur de nombreux domaines de recherche à l'intérieur des mathématiques, bien au-delà de la possibilité qu'il offre, comme les autres moyens informatisés de calcul, de développer économiquement une approche expérimentale en mathématiques. Il a permis à l'algèbre, qui s'était détachée de ses racines historiques, de renouer avec sa tradition algorithmique. Comme déjà souligné dans le rapport « Informatique et enseignement des mathématiques » de la commission, cette approche algorithmique induit des questions relatives à trois pôles : l'effectivité des problèmes, c'est à dire l'existence d'algorithmes permettant de les résoudre, la complexité des algorithmes évaluée en termes de temps (à travers le nombre d'étapes nécessaires au calcul en fonction de la taille des entrées) mais aussi en termes d'espace (à travers la taille des calculs intermédiaires, la taille du résultat), et l'efficacité des algorithmes (à travers la détermination de la taille des entrées que l'exécution machine de l'algorithme supporte pratiquement, efficacité bien sûr dépendante des moyens de calcul dont on dispose à un moment donné).

Comme nous l'avons souligné au début de ce rapport, la recherche d'algorithmes est constitutive du calcul et a joué un rôle fondamental dans le développement des

mathématiques. Même si le développement des logiciels de calcul accroît aujourd'hui sa visibilité et oblige à théoriser les problèmes qui en découlent, les mathématiciens sont habitués à se poser des questions d'effectivité depuis des siècles. L'implémentation d'algorithmes dans des logiciels de calcul formel est ainsi souvent l'aboutissement d'une très longue histoire. Citons par exemple, le problème du dénombrement des racines réelles d'une équation algébrique qui a été travaillé, entre autres, par Descartes, puis résolu complètement par Sturm en 1835. Citons encore le problème plus général de décider si un ensemble d'équations et d'inégalités polynomiales à coefficients entiers a une solution réelle. L'existence d'un algorithme pour ce problème a été démontrée par Tarski, au début du XXème siècle. Matiyasevich a en revanche montré que le problème est indécidable si l'on s'intéresse aux solutions entières, apportant ainsi une réponse négative à un des célèbres problèmes de Hilbert (cf. [9] par exemple).

Si les questions d'effectivité sont des questions traditionnelles du calcul, les questions de complexité sont, elles, plus récentes mais font l'objet aujourd'hui d'une formalisation satisfaisante. Il est évident que pour évaluer l'éventuelle portée pratique d'une méthode de calcul, une étude préalable de complexité est de première importance. Il ne faut pas simplement s'intéresser au nombre d'opérations arithmétiques mais aussi à la croissance éventuelle des coefficients, car lorsqu'on travaille en calcul exact, avec des nombres entiers, ceux-ci peuvent grossir énormément en cours de calcul. La détermination du nombre des racines réelles d'une équation algébrique, par exemple, peut se faire par des algorithmes de complexité raisonnable en fonction du degré des polynômes considérés et de la taille de leurs coefficients. En ce qui concerne le problème de décider si un ensemble d'équations et d'inégalités polynomiales à coefficients entiers a ou non une solution réelle, en revanche, la borne supérieure de complexité sera, au mieux, simplement exponentielle en le nombre de variables. En ce qui concerne les bases de Gröbner[10], enfin, la complexité est connue pour être doublement exponentielle dans certains cas.

En présence de telles complexités, l'étude expérimentale permettant de dégager les méthodes qui donneront des réponses pour les problèmes proposés par des domaines d'application est une troisième étape indispensable. En effet, la complexité théorique donne seulement une idée asymptotique de la difficulté intrinsèque d'un problème ; elle guide par conséquent les choix quant à la stratégie globale à adopter pour réaliser en pratique un gros calcul mais elle ne saurait suffire[11]. L'étude expérimentale a pour but de construire des variantes et d'optimiser les outils nécessaires à la mise en place effective de ces stratégies, en prenant en compte les ressources disponibles. Ce travail expérimental, bien que nécessaire au calcul, n'est pas encore pleinement reconnu en algèbre et en géométrie alors qu'il l'est dans le domaine de l'analyse numérique.

En dépit du rôle que le calcul formel joue aujourd'hui en mathématiques, dans le calcul scientifique, ses outils restent beaucoup moins utilisés que les outils de calcul approché. Ceci est bien sûr lié à la nature des problèmes soumis au calcul et aux résultats que l'on cherche à obtenir. Un résultat exact, même s'il est accessible, n'est pas forcément aisément exploitable : à un niveau relativement élémentaire, il suffit de penser aux solutions d'équations polynomiales résolubles par radicaux, même de degré faible, à un niveau plus avancé on

---

[10] Pour une introduction aux bases de Gröbner et à ces questions, on pourra consulter par exemple [10].

[11] On retrouve ici un phénomène proche de celui décrit à propos du contrôle des méthodes approchées de résolution des équations différentielles. Ceci est tout à fait normal : les questions de complexité, que nous avons abordées ici dans le contexte du calcul formel, transcendent le clivage calcul exact – calcul approché. Elles concernent aussi bien le calcul exact que le calcul approché dès lors que ces calculs s'algorithmisent (cf. par exemple [11]).

pensera aux problèmes posés en géométrie algébrique, dans la résolution de systèmes polynomiaux[12], par la lecture, la représentation et l'exploitation des résultats obtenus. Très souvent aussi, un résultat exact est inaccessible ou n'aurait pas de sens ; la notion même de résultat d'un calcul ne peut être pensée de façon absolue[13]. Les rapports entre calcul exact et calcul approché doivent être de ce fait pensés, non en termes d'opposition mais en termes de complémentarité, en fonction des problèmes que l'on cherche à résoudre. Ainsi, dans le traitement de nombreux problèmes que l'on va résoudre de façon approchée, les méthodes formelles peuvent intervenir dans un processus de pré-calcul algébrique, qui donne au problème une forme bien adaptée à une résolution numérique ; elles peuvent servir aussi à garantir la validité des calculs numériques qui interviendront dans une seconde phase. Mais le manque de familiarité de scientifiques et ingénieurs qui n'ont pas rencontré le calcul formel dans leur formation initiale et maîtrisent assez mal l'algèbre qui lui est sous-jacente n'aide pas aujourd'hui à exploiter cette complémentarité. C'est pourquoi, il nous semble important que l'on sorte des stéréotypes visant à opposer ces deux types de calcul et que l'on mette mieux en évidence dans l'enseignement, en particulier l'enseignement supérieur, la complémentarité de ces deux facettes du calcul scientifique. L'évolution actuelle des produits généralistes vers des produits mixtes, performants dans les deux registres de calcul, devrait le favoriser.

Si l'on revient pour conclure cette partie au monde fonctionnel, l'évolution technologique nous aide à voir les fonctions sous deux aspects complémentaires. D'abord, sous l'aspect numérique et graphique, les fonctions sont des objets à construire, à représenter, à tracer, à approcher. Les mathématiques engagées relèvent de l'analyse, tant pour l'étude des propriétés individuelles que pour celles des espaces de fonctions. A un certain niveau, il faut d'ailleurs considérer les fonctions comme éléments d'un espace fonctionnel. Ensuite, sous l'aspect formel, les fonctions sont des objets à définir ou à reconnaître exactement. Les mathématiques engagées relèvent de l'algèbre, qu'il s'agisse ou non de fonctions algébriques (on parle d'ailleurs à ce propos d'analyse algébrique). A un certain niveau, il faut considérer alors les fonctions comme éléments d'un corps muni d'une dérivation.

Nous avons choisi d'illustrer la complémentarité des pôles du calcul exact et approché, en nous situant dans le champ fonctionnel, à un niveau mathématique déjà avancé, ne concernant certes pas tous les élèves. C'est peut-être dans ce domaine que l'analyse épistémologique peut le plus nous aider à éclairer des questions aujourd'hui sensibles comme celles relatives à l'entrée dans le champ de l'analyse. Mais nous voudrions souligner dès maintenant que ces deux pôles sont en fait présents dès les premiers contacts avec le calcul et que, dès ces débuts, ils peuvent aider à structurer le rapport au calcul.

---

[12] Prenons l'exemple des systèmes polynomiaux, connus sous le nom « Cyclic n » (Cyclic 4 par exemple est la système : a+b+c+d=0, ab+ad+bc+cd=0, abc+abd+bcd+acd=0, abcd=-1). Le système Cyclic 5 par exemple a 70 solutions qui ont été trouvées à la main. Les moyens actuels permettent de résoudre le problème Cyclic 9 qui admet à la fois de nombreuses solutions isolées (6156) et des surfaces de solutions (trois surfaces de degré 6). Comment décrire de telles solutions de façon compacte, intelligible, exploitable pour obtenir des propriétés, dégager des invariants géométriques ou numériques ? C'est à ce type de questions non triviales qu'est confronté le mathématicien et, pour y répondre, il utilise des outils comme les bases de Gröbner, déjà évoquées, qui permettront d'obtenir des décompositions des variétés algébriques en composantes irréductibles, de connaître leur dimension, degré, genre … si les données ne sont pas trop énormes (la base de Gröbner associée à cyclic 9 fait tout de même 1,6 Go).

[13] En fait, le résultat brut d'un calcul peut être un objet trop complexe pour pouvoir être appréhendé tel que. On pourra parfois en obtenir une représentation compacte, en exploitant les invariants du problème et des considérations géométriques. Si le calcul produit des estimations d'une quantité distribuée dans le temps ou l'espace (champ de vitesses par exemple), on aura souvent recours à des visualisations (par exemple pour repérer où se produisent des tourbillons), qui pourront nécessiter elles-mêmes des études spécifiques.

II.5 RAPPORTS ENTRE CALCUL ET CONSTRUCTION DES CONCEPTS MATHEMATIQUES

Tout ce qui précède le montre clairement : le calcul, tant exact qu'approché, est intrinsèquement lié à la construction des concepts mathématiques et des théories. Mais nous voudrions insister plutôt dans ce paragraphe sur une caractéristique des rapports entre calcul et conceptualisation, non évoquée jusqu'ici et qui nous semble essentielle dans une perspective d'enseignement. Le calcul, dans de nombreux cas, commence à s'élaborer sur des objets encore mal spécifiés. Il fait d'abord l'objet de méthodes, il suffit de penser par exemple au tout début du calcul différentiel et intégral et à la profusion de méthodes qui l'accompagne : méthode des indivisibles, méthode d'adégalisation, méthode des infiniment petits, méthode des fluxions… C'est la productivité de ces méthodes qui est d'abord en jeu, leur capacité à résoudre plus efficacement des problèmes déjà résolus et surtout à en aborder de nouveaux, c'est elle qui permet l'explosion du calcul différentiel et intégral au XVIIIème siècle. Ce n'est que bien plus tard que les mathématiciens ressentiront la nécessité et auront aussi les moyens de fonder solidement ce calcul, en renonçant pour cette fondation aux objets emblématiques de l'histoire de ce calcul qu'étaient les quantités infinitésimales. On pourrait aussi évoquer l'histoire des quantités imaginaires (cf. l'ouvrage édité par la commission inter-IREM d'Epistémologie et histoire des mathématiques [12]) ou la genèse de l'algèbre linéaire telle qu'analysée par J. L. Dorier [13].

Un autre exemple éclairant est fourni par J.P. Kahane [14]. Le théorème fondamental : « L^2 est complet », établi par Fisher en 1907, généralisé aux espaces L^p ($p \geq 1$) par Riesz en 1910 est enseigné aujourd'hui en licence de mathématiques, sous cette forme, comme « théorème de Riesz ». Pourtant, en 1907, L^2 n'existait pas et le mot « complet » avait, en mathématiques, un autre sens : on parlait de système complet à propos de ce que nous appelons un système total. Ce n'est qu'avec Banach et sa théorie des opérations linéaires (1932) que les espaces complets prendront leur nom et leur place en analyse. Au départ, il y avait seulement un problème portant sur une certaine classe de coefficients de Fourier, et la solution, donnée indépendamment par Riesz et par Fisher, avec des méthodes différentes mais faisant apparaître le même ingrédient. C'est cet ingrédient que nous retenons comme le théorème. Désormais le théorème tient en trois mots mais les deux mots « L^p » et « complet » sont l'aboutissement d'une longue démarche, un véritable élixir de pensée mathématique. La substance du problème, de la solution, de la méthode, est passée dans les définitions.

Même si l'enseignement a d'autres moyens que de reproduire les méandres de l'histoire pour donner sens aux concepts et théories qu'il enseigne - il ne pourrait d'ailleurs se le permettre - il est clair qu'il doit savoir tirer les leçons de ces caractéristiques épistémologiques et accepter que le calcul puisse se déployer et aider à construire un univers mathématique, alors même que ses objets n'en sont pas, ne peuvent pas encore être parfaitement définis. Ceci est sans doute moins facile et moins satisfaisant pour l'enseignant, comme le faisait déjà remarquer Poincaré au début de ce siècle, dans une conférence elle aussi consacrée aux définitions mathématiques [15], mais est incontournable. Ceci impose une mémoire au système d'enseignement car, devant composer avec des savoirs provisoires, il doit aussi savoir organiser les reprises nécessaires à d'autres niveaux de conceptualisation, sans faire table rase du passé mathématique de l'élève mais en étant sensible aux reconstructions que nécessitent ces reprises sur le plan cognitif.

III. EPISTEMOLOGIE DU CALCUL ET IMAGE DU CALCUL DANS LA CULTURE ET DANS L'ENSEIGNEMENT

Nous avons dans cette première partie pointé quelques caractéristiques du calcul qui nous semblent importantes à prendre en compte dans une réflexion sur l'enseignement. En fait, l'image du calcul dans la culture et dans l'enseignement n'est guère conforme à ce qui précède et nous voudrions évoquer successivement trois points pour lesquels les décalages nous semblent particulièrement dangereux.

III.1 LA VISION DES RAPPORTS ENTRE CALCUL ET RAISONNEMENT

Dans la culture, les deux termes : calcul mathématique et raisonnement apparaissent comme antagonistes[14]. Le calcul est opposé au raisonnement tant dans les démarches de pensée qu'il met en oeuvre que dans les formes d'apprentissage qu'il requiert. Le calcul renvoie à une activité mécanique, automatisable, sans intelligence, il est réduit à sa part mécanisée. Son apprentissage renvoie à l'idée d'entraînement purement répétitif. En bref, le calcul est perçu comme renvoyant aux basses œuvres du travail mathématique, tandis que sa partie noble, celle liée au raisonnement est plutôt associée à la résolution de problèmes géométriques. Cette image, ancrée dans la culture, est aussi portée par l'enseignement. C'est une géométrie synthétique, sans calcul, qui est presque exclusivement mobilisée quand il s'agit d'initier les élèves à la rationalité mathématique, de leur apprendre à démontrer et, lorsque l'on demande à des enseignants quelles sont les fonctions de l'algèbre au collège, la fonction d'outil de preuve n'est généralement pas identifiée. On estime par ailleurs que, si l'on dispose d'instruments pour effectuer la partie mécanisée du calcul, il n'y a plus rien à apprendre puisque le calcul s'y réduit. Le calcul, qu'il soit numérique ou algébrique, est en fait réduit à ses traces et le raisonnement qui le guide reste invisible. Ses résultats sont vus comme des données, ils n'ont pas valeur de preuve.

Il y a, dans l'enseignement, à lutter contre cette vision réductrice du calcul. C'est en particulier nécessaire si l'on veut poser de façon correcte la question de l'instrumentation du calcul par les technologies informatiques.

<u>Le rôle privilégié du calcul mental pour mettre en place les rapports entre calcul et raisonnement dès les débuts de la scolarité :</u>

Le calcul, dès les débuts de la scolarité élémentaire, peut et doit être pensé dans ses rapports au raisonnement et à la preuve. Le calcul mental a, nous semble-t-il, un rôle essentiel à jouer à ce niveau. Il est une façon privilégiée de lier calcul et raisonnement, en mettant en jeu les propriétés des nombres et des opérations, comme le montrent par exemple les travaux de D. Butlen et N. Pezard [16]. Il n'est bien sûr pas question ici de viser l'apprentissage systématique de techniques ad hoc de calcul mental, comme on peut en trouver dans certains anciens manuels d'arithmétique. Il s'agit d'utiliser les caractéristiques du calcul mental :

- pour susciter une réflexion sur le calcul, les techniques opératoires usuelles étant trop coûteuses en mémoire pour se prêter à une exécution mentale,
- pour mettre en évidence la diversité des façons possibles d'aborder généralement un calcul, comparer leurs coûts, les connaissances qui les fondent,
- pour susciter des formulations, des généralisations et des preuves.

---

[14] Soulignons que cet antagonisme ne se manifeste pourtant pas dans les acceptions les plus générales du terme calcul.

Ce qui est de plus important dans ce calcul, ce n'est pas qu'il soit exclusivement mental. Pour des calculs un peu complexes, il peut utilement s'appuyer sur des écritures intermédiaires ; l'important c'est qu'il oblige à penser le calcul, de façon flexible, alors que l'algorithme, une fois installé, le rigidifie car il est là pour économiser la pensée, la rendre mobilisable à d'autres fins.

Les liens entre calcul et raisonnement doivent bien sûr trouver à s'exprimer, dès l'école élémentaire, dans bien d'autres situations. Il s'agit en particulier de restituer leur place à la planification, l'ordonnancement des calculs dans des tâches d'ordre numérique. On voit là bien sûr les germes de la pensée algorithmique dont nous avons évoqué l'importance dans la première partie. Elle peut être mobilisée très tôt, par exemple via la recherche de stratégies d'énumération de collections ordonnées ou non ordonnées, en préalable à leur dénombrement, comme le montre la thèse de J. Briand [17].

Le calcul algébrique, quand il est introduit, constitue un nouvel espace où va se déployer le raisonnement, en permettant notamment d'expliquer, de généraliser des constats numériques. L'enseignement est jusqu'ici assez peu sensible à cette fonction du calcul algébrique, comme outil de preuve, peu portée par la culture. Il se prive ainsi des moyens de revisiter d'un point de vue avancé, les connaissances élémentaires du cadre numérique. Mais les rapports entre calcul algébrique et raisonnement vont être en jeu dès lors que le calcul algébrique ne se limitera pas à l'exécution d'algorithmes familiers, dans la résolution de tâches routinières ou étroitement balisées, donc dès que, comme nous l'exprimions plus haut, la conduite du calcul va nécessiter une intelligence du calcul. Comme nous l'avons déjà souligné, l'enseignement doit prendre en charge le développement des moyens de cette intelligence du calcul nécessaire à un calcul raisonné, des moyens qui sont en partie communs et en partie propres à chaque type de calcul. Il a d'ailleurs peut-être mieux les moyens de le faire aujourd'hui que les équilibres entre exécution, pilotage et contrôle du calcul se trouvent déplacés par l'évolution technologique. Encore faut-il bien sûr intégrer cette technologie de façon adéquate dans l'enseignement, en construisant des situations où pilotage et contrôle soient nécessaires. Il y a là sans aucun doute un effort de créativité indéniable à mettre en jeu, de nombreux travaux de recherche sur les calculatrices et logiciels montrant clairement l'inadéquation, dans cet esprit, de beaucoup des situations de calcul ordinaire, pensées pour être gérables et efficaces en papier / crayon et modelées donc par des contraintes sensiblement différentes. Nous en donnerons des exemples dans la suite du rapport.

III.2 LA VISION DES RAPPORTS ENTRE CALCUL EXACT ET CALCUL APPROCHE

Dans la culture, ces deux types sont souvent présentés en opposition, le calcul approché apparaissant comme ce à quoi le mathématicien se résout quand le calcul exact devient inaccessible. La réalité est bien plus complexe, comme nous avons essayé de le montrer même s'il y a dans cette vision une part de vérité. Dans la résolution de nombreux problèmes où sont engagés des calculs mathématiques aujourd'hui, la recherche de solutions exactes n'est ni pertinente, ni utile. De plus, même quand le calcul exact est visé et est possible, ses résultats ne sont pas nécessairement facilement exploitables. En fait, l'opposition entre calcul exact et calcul approché dans la culture, renvoie aussi, plus ou moins implicitement, à la distinction entre mathématiques pures et mathématiques appliquées, et à toutes les hiérarchies de valeurs dont cette distinction a été porteuse. Aujourd'hui cette distinction semble de plus en plus inadaptée car, s'il y a des pratiques mathématiques différentes, elles tiennent plus aux types de problèmes que le mathématicien cherche à résoudre qu'aux objets et aux domaines mathématiques eux-mêmes, comme le montre bien par exemple N. Bouleau [18].

L'enseignement n'échappe pas à cette vision culturelle et, traditionnellement, la part accordée au calcul approché y est réduite, au moins pour les niveaux d'enseignement qui nous intéressent principalement ici. Les rapports entre calcul exact et calcul approché ne sont pas vus dans leur complémentarité mais dans une opposition hiérarchique de valeurs, le calcul noble étant le calcul exact. Ceci ne peut manquer de marquer les futurs enseignants, comme le montre la thèse d'A. Bronner [19], même si un effort réel est fait dans la préparation du CAPES, notamment la préparation à l'oral, pour construire des rapports plus équilibrés, et tend à la reproduction du système.

Pourtant, si l'on en croit les travaux des cogniticiens (cf. par exemple l'ouvrage de S. Dehaene [20]), l'être humain, comme d'ailleurs un certain nombre d'animaux, serait biologiquement équipe de potentialités lui permettant d'abord un calcul approché rudimentaire. Par exemple, très tôt, le bébé est capable de comparer des quantités, la comparaison étant plus facile si les nombres sont éloignés que s'ils sont proches, l'écart jouant de façon relative par rapport à la taille des quantités en jeu et non de façon absolue. S. Dehaene modélise ces compétences en terme de capacités offertes par une sorte de compteur analogique travaillant sur du continu. Le calcul exact, quant à lui, renverrait à des processus cognitifs distincts, sollicitant en particulier des mémorisations de type langagier, et le cerveau humain y serait beaucoup moins naturellement adapté (au delà de la discrimination globale des nombres jusqu'à 3 qui semble faire partie du patrimoine commun déjà mentionné). D'où le coût à l'apprentissage élevé des moyens du calcul exact que sont par exemple les tables d'addition et de multiplication[15]. Ces différences se retrouvent dans les localisations cérébrales où elles se conjuguent avec un éclatement tout à fait étonnant des fonctions mis en évidence par le travail avec des personnes souffrant de lésions cérébrales (gestion par exemple de quantités contextualisées pour certains contextes mais impossibilité de gérer des calculs équivalents voire plus simples portant sur des quantités abstraites). Bien sûr, tout calcul approché un tant soit peu complexe implique aussi du calcul exact donc mobilise l'ensemble des zones concernées, mais une gestion efficace suppose des connexions efficaces et, sans aucun doute, un des rôles essentiels de l'enseignement et de l'apprentissage est de constituer et renforcer des associations efficaces, tout en introduisant parallèlement des inhibitions et contrôles à certaines associations par trop automatiques.

Le jeu du calcul entre « approché » / « exact » nous semble donc pouvoir et devoir se mettre en place dès les débuts de la scolarité et là encore, il nous semble que l'évolution technologique peut contribuer à aider à établir de meilleurs équilibres. En effet, si l'on prend en compte le fait que, dès que les calculs même élémentaires sont un tant soit peu complexes (la notion de complexité étant ici très relative), ils sont dans toutes les pratiques scientifiques et sociales aujourd'hui pris en charge par des instruments de calcul, le contrôle de ces productions machine prend une importance accrue. Et ce qui est à la base de ce contrôle, c'est d'abord la capacité, via le calcul mental, d'évaluer des ordres de grandeurs. Bien sûr, cette évaluation d'ordres de grandeur, qui relève du calcul approché, dépend elle-même de compétences de calcul exact, mais pas exactement de celles nécessaires à l'exécution fiable par exemple de multiplications ou divisions de nombres de plusieurs chiffres quelconques. Le calcul avec les puissances de dix, associé à la connaissance d'une base raisonnable de résultats, dont font partie, bien sûr, les tables d'addition et de multiplication, la capacité à décomposer et recomposer les nombres et à jouer sur les propriétés des opérations sont ici les

[15] Ce coût élevé, associé à la disponibilité d'instruments de calcul, pourrait inciter à penser qu'il n'y a plus lieu de consacrer du temps d'enseignement à ces apprentissages. Ceci nous semble une profonde erreur. En revanche, ce qu'implique le coût cognitif ainsi identifié, c'est la nécessité, pour l'enseignement, de trouver les moyens d'aider cette mémorisation, en aidant à établir des liens mathématiques entre les résultats, en ne la limitant pas à sa seule caractéristique linguistique. On retrouve une fois de plus en jeu l'intelligence du calcul.

outils de base pour contrôler la taille des nombres produits. A ceci vont s'ajouter des contrôles plus locaux qui peuvent porter par exemple sur les derniers chiffres et mettre en jeu, de façon plus ou moins élémentaire, propriétés arithmétiques des nombres et congruences.

Ce fil du calcul exact et approché, qui peut ainsi commencer à se tisser dès les premiers apprentissages sur les entiers, va se développer ensuite avec l'extension du champ des nombres, vers les décimaux et les rationnels. Et, à travers cette extension du champ des nombres, vu la densité des ensembles de nombres construits dans le continu numérique, l'élève peut effectuer en fait ses premiers pas dans le monde mathématique de l'approximation, comme en témoignent par exemple les ingénieries didactiques élaborées par G. Brousseau [21] et R. Douady [22] pour la construction des rationnels et décimaux à l'école élémentaire. Les premiers contacts avec l'algèbre vont sans doute faire fortement pencher la balance dans le sens du calcul exact mais le calcul sur les puissances au collège doit être une occasion de retravailler et approfondir la question des ordres de grandeur, préparant le travail ultérieur de l'analyse. Les interactions avec les autres disciplines, vu l'éventail des échelles de grandeur que ces dernières font intervenir pour l'étude de phénomènes physiques et biologiques, sont sans doute un support privilégié pour donner sens à ce travail et, à travers lui, approcher le « très grand » et le « très petit ». Avec l'entrée dans le monde de l'analyse, les rapports entre calcul exact et calcul approché vont s'inscrire dans des complémentarités nouvelles. L'analyse permettra, en particulier, de montrer que les objets emblématiques de l'algèbre que sont les équations peuvent s'inscrire dans un autre rapport mathématique : celui de l'approximation (approximation de nombres, de fonctions) et d'enrichir donc le rapport à ces objets. Des notions, comme celle d'ordre de grandeur, travaillées depuis les débuts de la scolarité, prendront un autre statut, en devenant les instruments fondamentaux du travail mathématique, tant théorique que pratique. Nous nous arrêterons là, à ce niveau de la réflexion, nous réservant de revenir de façon plus détaillée sur ces questions dans la suite du rapport.

III.3 LA VISION DES RAPPORTS ENTRE CALCUL ET INSTRUMENTS DU CALCUL

La vision des rapports entre calcul et instruments du calcul portée par la culture est, elle aussi, souvent peu conforme à la réalité. Certes, nul ne songerait à nier la dépendance du calcul des instruments du calcul mais cette dépendance est vue un peu à sens unique, comme si le calcul lui-même n'était pas partie prenante dans l'évolution des instruments, et les implications qui en sont tirées, au niveau de l'enseignement, sont souvent caricaturales : les machines prenant en charge le calcul, plus n'est besoin d'apprendre des mathématiques, ou, en sens inverse, si l'on veut apprendre des mathématiques, il faut mettre à l'écart ces dangereux objets qui empêchent d'apprendre, en prenant le travail habituel de l'élève.

Il est clair que l'évolution technologique perturbe les équilibres traditionnels du calcul dans l'enseignement et nous l'avons souligné à diverses reprises dans le début de ce rapport mais ces visions caricaturales, les prises de position péremptoires qui souvent les accompagnent, n'aident pas l'enseignement à faire face aux problèmes délicats que ces ruptures d'équilibres engendrent, tant pour l'enseignement que pour la formation des enseignants.

En ce qui concerne spécifiquement le calcul, nous voudrions, en complément à ce que nous avons écrit jusqu'ici et au contenu du rapport « Informatique et enseignement des mathématiques », insister sur deux points : d'une part, sur les besoins mathématiques du calcul instrumenté et la nécessité de penser des stratégies d'intégration d'instruments de calcul dans la durée qui en résulte, d'autre part, sur la nécessité de diversifier dans les situations d'enseignement, les modes d'intervention des instruments, l'interaction entre calcul assisté et calcul papier / crayon, en fonction des objectifs spécifiques que l'on se fixe, à tel ou

tel moment. Nous nous appuyons plus spécifiquement sur ce point sur différents travaux de recherche concernant l'intégration de calculatrices et logiciels à l'enseignement dont une première synthèse est effectuée dans [23].

Un objet technologique : calculatrice ou logiciel, est d'abord un objet. Ce n'est que via un processus de genèse instrumentale relativement complexe qu'il peut devenir un réel instrument mathématique pour l'élève, l'étudiant ou l'enseignant. Par exemple, dans les conditions qui prévalent aujourd'hui dans l'enseignement pour les calculatrices, où l'utilisation est acceptée mais où il n'y a pas réellement d'intégration, on s'aperçoit que les élèves maîtrisent très peu les instruments sophistiqués dont ils disposent. Ils savent les utiliser quand d'emblée ils fournissent la réponse demandée, ils sont peu capables de s'adapter si ce n'est pas le cas, encore moins de contrôler les résultats obtenus, que ce soit au niveau numérique ou graphique. Dans ces conditions, l'usage de ces objets ne sert ni le développement du calcul, ni l'articulation entre calcul et raisonnement.

L'instrumentation mathématique des objets technologiques ne va pas de soi. Elle nécessite des compétences mathématiques, certaines déjà visées par l'enseignement, d'autres plus spécifiques de la technologie considérée. L'enseignement tend à sous-estimer ces besoins et n'est pas forcément prêt à y consacrer le temps nécessaire, lorsque les apprentissages requis s'écartent un tant soit peu de ses objectifs déclarés, pour des raisons aisément compréhensibles. D'où l'importance, déjà soulignée dans le rapport « Informatique et enseignement des mathématiques », d'une part de bien identifier ces besoins, d'autre part de les prendre en compte sérieusement dans la définition des objectifs de l'enseignement, en allant au-delà des encouragements voire injonctions à utiliser telle ou telle technologie.

Dans la situation actuelle, l'enseignement cherche avant tout ce qui, dans l'utilisation des calculatrices et logiciels, peut servir la réalisation d'objectifs, essentiellement pensés en dehors des instruments de calcul. Cette situation n'est pas tenable à terme. Certes l'instrumentation des technologies rencontre certains besoins traditionnels de l'enseignement, nous en avons donné des exemples plus haut, dans le domaine du calcul élémentaire. De même l'instrumentation de tableurs au collège rencontre les préoccupations de l'enseignement sur le statut des lettres et la notion de variable, l'utilisation de calculatrices symboliques ou de logiciels de calcul formel, celles sur la syntaxe, la structure des expressions algébriques et l'importance de sa prise en compte dans le calcul. Mais quel que soit l'instrument, l'implantation informatique de savoirs mathématiques qui y est opérée introduit nécessairement des différences avec le fonctionnement usuel du calcul. Une instrumentation efficace ne peut négliger ces différences, elle se doit donc de prendre en charge des dimensions de la connaissance hors du champ usuel du calcul. Le calcul numérique instrumenté, même élémentaire, implique ainsi de prendre en charge une certaine non-commutativité. L'instrumentation du tableur implique de savoir composer avec plusieurs notions de variables. L'instrumentation de calculatrices symboliques ou de logiciels de calcul formel impose de savoir faire face à une diversité des formes symboliques qui va bien au delà de ce qui est usuel dans le calcul papier / crayon ; elle impose aussi une maîtrise de la gestion par la machine des rapports entre calcul exact et approché, certes tout à fait intéressante, mais qui va bien au-delà des préoccupations actuelles de l'enseignement, au moins au niveau du second degré. La constitution d'équilibres satisfaisants dans l'enseignement, dans le domaine du calcul, nécessite que ces questions soient prises en compte, tant dans la définition des exigences curriculaires que dans la formation des enseignants, et qu'elles le soient de façon cohérente dans la durée.

Nous avons insisté, dans ce qui précède, sur les questions d'instrumentation car nous y voyons une source de difficultés réelles pour l'enseignement, sous-estimée par les décideurs, sous-estimée aussi dans la formation des enseignants. Ceci ne doit pas laisser penser que le

seul objectif de l'enseignement du calcul soit de rendre les élèves capables de calculer, sans assistance quand le calcul, quelle que soit sa nature, reste techniquement simple, de façon assistée par des calculatrices et logiciels, lorsque sa complexité augmente. Comme nous l'avons souligné dans la première partie de ce rapport, calcul et développement des concepts sont en mathématiques intrinsèquement liés. Et c'est en fonction de cette interaction que doit être aussi pensée l'utilisation des instruments de calcul. Ceci nécessite de décider, en fonction des objectifs précis de telle ou telle séance, si le calcul sera instrumenté ou non par des machines et dans quelles conditions. Il n'y a pas là de règle générale, et le rôle que les machines vont jouer dans le calcul va nécessairement varier suivant les moments de l'apprentissage, suivant aussi les stratégies d'enseignement choisies par tel ou tel professeur. Certains accepteront ainsi de faire fonctionner la machine, à certains moments, comme une boîte noire, productrice de données, d'une certaine réalité expérimentale, à laquelle il faudra donner sens, en l'organisant et en introduisant les concepts nécessaires. D'autres y seront plus réticents, préférant réserver l'usage des machines à un moment de l'apprentissage où un certain niveau de conceptualisation, qui permette un contrôle minimal des productions de la machine, semble atteint. Mais, quels que soient les choix effectués, ceci nécessite la construction de situations où, justement, l'utilisation des machines ne dispense pas de penser. Il ne suffit pas pour cela en général de rajouter la machine dans une situation organisée pour un environnement en papier / crayon. Il faut savoir adapter les situations en fonction des nouvelles caractéristiques de l'environnement, en prenant en compte les possibilités d'action qu'il offre et leur coût, les rétroactions que le système peut renvoyer à l'élève, les moyens de validation dont il dispose[16], il faut aussi savoir inventer des situations qui ne pourraient pas exister en papier / crayon. De nombreux exemples existent mais cette construction n'a rien d'évident. Les situations simples et efficaces, à la portée d'enseignants formés mais non-experts, ne sont pas forcément celles qui sont produites en premier quand on est face à la richesse des possibilités offertes par les environnements technologiques. La gestion elle-même de ces situations demande des compétences accrues des enseignants[17]. Il leur faut en particulier gérer l'interaction du calcul papier / crayon et du calcul assisté par machine, la progression articulée et cohérente des compétences dans ces deux registres. Il est clair qu'il y a là des besoins de formation énormes à la fois au niveau de la formation initiale et de la formation continue qui, pour l'instant, sont loin d'être correctement assurés.

Compte-tenu de tout ce qui précède, il est clair que la question qui se pose à l'enseignement n'est pas : « faut-il enseigner le calcul, faut-il enseigner à calculer ? », mais bien plutôt :

---

[16] Prenons un exemple simple : une calculatrice est un outil privilégié pour explorer les développements décimaux des rationnels et conjecturer leur périodicité. Le calcul à la main peut alors utilement prendre le relais pour faire sentir ce que l'immédiateté du résultat donné par la machine ne donnait pas à voir, la raison de cette périodicité : on retombe inévitablement à un moment sur une étape antérieure du calcul, en retombant sur un reste déjà rencontré. Même mené sur un exemple particulier, le calcul à la main aura ici une valeur générique : on retombe sur un reste déjà rencontré car le nombre des restes possibles est fini. L'assurance théorique ainsi acquise peut conduire à chercher à élaborer un programme qui forcerait la machine à donner ce développement périodique, même lorsqu'il n'est pas immédiatement accessible, dépassant ainsi ses productions premières. De nouvelles explorations machine peuvent prendre ensuite le relais pour conduire à des conjectures sur les longueurs possibles des périodes, sur les variations de leur premier terme, conjectures qu'il s'agira ensuite de prouver à leur tour. Le jeu pourra se prolonger avec les approximations de réels par des fractions continues, autre mine de régularités et découvertes passionnantes, comme le montre l'exemple donné en annexe.

[17] La diversité des matériels, au niveau des calculatrices, même si le matériel est aujourd'hui plus homogène, ajoute à cette complexité. A travers elle, se pose aussi clairement le problème de décider, en termes d'instrumentation, entre ce qui doit être pris en charge par l'enseignant et ce qui doit être laissé sous la responsabilité de l'élève.

« que faut-il enseigner aujourd'hui en matière de calcul, compte-tenu de l'évolution scientifique, mais aussi compte-tenu des évolutions sociale et technologique ? Et, comment le faire de manière à dépasser les obstacles culturels qui s'opposent à la mise en place de rapports satisfaisants au monde du calcul ? » C'est la réflexion sur ces questions que nous souhaitons poursuivre dans la suite de ce rapport, en commençant par envisager les premiers rapports au monde du calcul qui s'établissent à travers ceux aux notions de nombre, grandeur, mesure et dimension, avant de nous attacher successivement au calcul algébrique, de l'entrée dans la pensée algébrique au collège à la reconstruction du rapport à l'algèbre en termes de structures, au niveau universitaire, à l'analyse et aux rapports nouveaux qui s'y nouent entre discret et continu, exact et approché.

Nous sommes bien conscients que nous nous limitons ainsi aux formes les plus traditionnelles du calcul, aux niveaux d'enseignement considérés ici. Nous ne sous-estimons pas pour autant le rôle accru que jouent en mathématiques d'autres types de calcul, qu'il s'agisse du calcul sur des objets discrets dont l'importance a été soulignée dans le rapport « Informatique et enseignement des mathématiques » de la commission, ou aux statistiques et probabilités, qui font l'objet d'un rapport spécifique.

IV LES PREMIERS RAPPORTS AVEC LE CHAMP DU CALCUL : NOMBRES, GRANDEURS, MESURE ET DIMENSION

Comme annoncé plus haut, il ne s'agit pas ici de traiter de façon exhaustive la question de l'enseignement élémentaire du calcul, mais de nous centrer sur un petit nombre de questions qu'il nous semble important d'aborder pour nourrir une réflexion actuelle sur l'enseignement. Nous avons choisi de nous centrer sur les points suivants : calcul mental, mémorisation et techniques opératoires, calcul et stratégies de calcul, grandeurs, mesure et dimensions, calcul et extension du champ des nombres .

IV. 1 CALCUL MENTAL

Nous avons déjà évoqué à plusieurs reprises, dans ce qui précède, le rôle que peut jouer le calcul mental, pour lier dès l'école élémentaire calcul et raisonnement, calcul exact et calcul approché, pour motiver le développement d'une première approche des ordres de grandeur.

Le calcul mental évoque souvent, dans la culture, les pratiques anciennes qui lui étaient attachées, à l'école élémentaire : un calcul était proposé, exécuté mentalement, selon des règles établies, le résultat écrit sur une ardoise que les élèves levaient à la demande de l'enseignant. Il en tire, à tort, une image d'objet suranné voire obsolète. Le calcul mental ne l'est pourtant en rien. C'est parmi tous les modes de calcul dont nous disposons, le plus immédiatement, universellement, disponible : nous en sommes en effet le seul instrument et, à ce titre, il est, de toutes façons, incontournable.

Pour remplir la fonction que nous souhaitons lui voir jouer de lien entre calcul et raisonnement, il n'est pas souhaitable que ce calcul mental soit systématiquement routinisé, automatisé. Il est plus important qu'il soit associé à des stratégies de calcul diverses, qu'il s'agira de valider, de comparer du point de vue des connaissances engagées, du point de vue du coût, de l'efficacité, dans des tâches non stéréotypées. Ce sont d'ailleurs les ambitions du calcul dit « réfléchi » dans les programmes actuels de l'école élémentaire.

Le calcul mental est engagé dans des tâches de calcul exact comme de calcul approché. Dans le registre du calcul approché, il est tout particulièrement nécessaire, pour contrôler de façon économique, le calcul numérique instrumenté par les calculatrices, pour effectuer les

anticipations numériques que nécessite la vie quotidienne, comme par exemple celles que va nécessiter à partir de 2002, à toute la population, le passage à l'Euro. Il conduit alors à évaluer des ordres de grandeur.

IV.2 MEMORISATION ET TECHNIQUES OPERATOIRES

Tout calcul oral ou écrit suppose pour être exécuté un répertoire. La constitution du répertoire qui occupait un temps important de l'enseignement semble aujourd'hui une tâche plus marginale. Il y a quelques décennies, le répertoire des tables d'addition et de multiplication, était matériellement disponible, sur la couverture des cahiers de classe. La mémorisation des tables était prise en charge par l'enseignement et occupait un temps non négligeable : on apprenait les tables, on en connaissait l'air avant d'en connaître les paroles, on les récitait. De telles pratiques se sont vues disqualifiées lorsque l'enseignement s'est fixé des ambitions plus conceptuelles. La mémorisation, telle qu'elle s'opérait, s'opposait à la construction voulue raisonnée des connaissances. L'élève devait être capable de retrouver les résultats du répertoire et, ce faisant, il mettait en jeu intelligemment sa connaissance des nombres et de leurs propriétés ; la mémorisation devenait secondaire. L'évolution technologique, en limitant la taille des calculs que l'on pouvait se donner l'objectif de maîtriser sans calculatrice a contribué à cette évolution : si l'on ne faisait à la main que des calculs simples, les effets de répertoire apparaissaient moins. L'évolution qui est décrite là n'est d'ailleurs pas propre aux mathématiques. Dans toutes les disciplines scolaires, le travail de mémorisation est de moins en moins sollicité et ceci le rend d'autant plus difficile.

Il nous semble important de souligner que, même s'il est assisté par des calculatrices dès qu'il devient un peu complexe, le calcul numérique pour s'exercer mentalement et par écrit, de façon efficace et flexible, doit pouvoir s'appuyer sur un répertoire progressivement mémorisé. Celui des tables classiques reste sans doute un minimum[18]. Ce que nous savons aujourd'hui du fonctionnement du cerveau, montre qu'une mémorisation, sur des bases linguistiques, par récitation dans un sens et dans l'autre, est très coûteuse. Elle n'est pas non plus mathématiquement pertinente. Il importe donc de construire des stratégies d'apprentissage moins coûteuses et mieux adaptées, jouant sur les particularités, les régularités, les compositions et décompositions de nombres, mais en visant progressivement une réelle mémorisation, permettant de libérer l'esprit, dans le calcul, pour d'autres tâches et de calculer à une vitesse raisonnable[19].

La mémorisation, que nous abordons ici dans le cadre des premiers calculs numériques, joue bien sûr à tous niveaux, dans le calcul. Les répertoires s'élargissent progressivement et, à tous niveaux, le calcul, pour être efficace, doit pouvoir s'appuyer sur un répertoire mémorisé. Les élèves pensent souvent que cette mémorisation est secondaire dans la mesure où ils peuvent accéder aux résultats numériques ou algébriques, via la mémoire de leur calculatrice ou le formulaire au baccalauréat. Il importe sans aucun doute de leur faire sentir que, dès que le calcul n'est plus routinier ou complètement balisé, son pilotage intelligent ne peut se faire sans un répertoire minimal numérique et formel, qui permet de reconnaître des formes, d'anticiper des transformations possibles et pertinentes. Une partie de ce répertoire doit être mémorisée et immédiatement accessible, en fonction des fréquences d'emploi, une autre partie peut être mémorisée de façon plus floue mais rapidement récupérable. Le cas du calcul

---

[18] Au delà des résultats des tables, la mémorisation de carrés, de puissances de 2, sont sans aucun doute particulièrement utiles.

[19] Une évolution dans ce sens est sensible dans divers ouvrages et l'on pourra par exemple consulter la dernière édition de la collection ERMEL, issue des travaux de l'INRP.

trigonométrique et des difficultés qu'il présente pour les élèves, en particulier faute d'une mémorisation suffisante des formules les plus élémentaires, illustre parfaitement ce qui précède.

La place à accorder aujourd'hui à la mise en place puis à la maîtrise des techniques opératoires est source de débat. On assiste à un recul progressif de cette mise en place sur la pertinence duquel on peut s'interroger. Il est évident qu'aujourd'hui, le calcul numérique exact que nous faisons à la main, sans assistance, est très limité. Il semble difficile d'exiger de l'école qu'elle consacre un part importante du temps réduit dont elle dispose pour développer des compétences que plus personne n'utilise. Dans le même temps, nous souhaitons, à juste titre, que les élèves ne soient pas dépendants de leur calculatrice pour le moindre calcul. Ceci nécessite, au delà de la mémorisation d'un répertoire et de compétences de calcul mental, la mise en place de techniques de calcul écrit, et une fiabilité de ce calcul dans les cas simples. Les nouvelles conditions du calcul écrit permettent sans doute de se satisfaire d'un écrit qui n'est pas nécessairement le plus économique, notamment dans le cas de la division, mais, pour autant, est-il raisonnable de reporter au collège l'apprentissage de cette technique opératoire ?

IV.3 CALCUL ET STRATEGIES DE CALCUL

L'enseignement des mathématiques se veut aujourd'hui centré sur la résolution de problèmes, mais les problèmes rencontrés par les élèves restent souvent très stéréotypés et, s'ils servent à donner sens aux opérations, ils ne nourrissent pas nécessairement le développement de compétences en matière d'organisation du calcul, le besoin d'explicitation de cette organisation. Des problèmes de nature combinatoire, tels ceux qui sont souvent proposés dans les rallyes mathématiques qui existent dès l'école élémentaire, peuvent constituer un espace privilégié pour le développement de telles compétences. La représentation de l'organisation des calculs, sous forme de programmes de calculs, sous formes d'arbres, la comparaison de programmes ou arbres associés à la résolution d'un même problème, permettent de faire vivre réellement la dimension algorithmique du calcul, dès les premiers contacts avec le champ des nombres, ce que ne permet sans doute pas, vu la complexité des algorithmes sous-jacents, la mise en place des techniques opératoires.

IV.4 GRANDEURS ET MESURES

Les grandeurs ont joué jusqu'à l'époque des mathématiques modernes un rôle fondamental dans l'enseignement des mathématiques et le calcul. Elles en ont alors disparu brutalement, ont été depuis réintroduites à l'école élémentaire et au collège, mais sans que le rôle que l'on souhaite leur faire jouer soit toujours clairement explicité. Nous voudrions ici souligner l'importance de leur prise en compte, pour donner sens au calcul mathématique, dans ses rapports avec le réel et les autres disciplines scientifiques.

Les grandeurs font partie de l'édifice mathématique dès l'antiquité. Le livre V des Eléments d'EUCLIDE leur est consacré et c'est à travers elles qu'y est géré le calcul des quantités non discrètes, commensurables et incommensurables, qui n'ont pas, on le sait, dans les mathématiques grecques, le statut de nombre. Les grandeurs de même nature peuvent être comparées et additionnées. La théorie d'Eudoxe qui préfigure les réels est basée sur les rapports de grandeurs de même nature. Mais le produit de grandeurs, même de même nature, n'a pas nécessairement de sens.

La séparation du calcul entre calcul sur les nombres et calcul sur les grandeurs, à la base du calcul dans les mathématiques de l'antiquité, va perdurer dans les mathématiques pendant des

siècles. L'unification du champ des nombres au XIXème siècle va conduire à établir d'autres rapports entre grandeurs et nombres. On montrera que toute grandeur[20] provient d'une mesure des grandeurs au sens suivant : si G est un ensemble de grandeurs de même nature, il existe une injection μ de G dans R^+ telle que les lois sur G soient induites par celles sur R, μ étant unique à un coefficient de proportionnalité près, c'est-à-dire au choix d'une unité près dans G. Ainsi, une fois choisie une unité, les grandeurs correspondent exactement aux nombres réels, construits eux à partir des entiers, ou à un sous-ensemble de R. D'où la tentation d'oublier les grandeurs pour se situer directement dans le champ des nombres. C'est ce que prônait Lebesgue quand il écrivait dans [24] : « Ce sont les nombres qui, seuls, servent en mathématiques ; libre à chacun de surajouter à ces notions mathématiques des notions métaphysiques, mais celles-ci ne doivent pas intervenir dans l'enseignement ». C'est ce que fera la réforme des mathématiques modernes, évacuant par exemple la notion d'aire comme invariant de surfaces.[21]

Il nous semble essentiel pourtant de garder dans l'enseignement, en particulier à l'école élémentaire et au collège, une place substantielle à la notion de grandeur et d'en expliciter les raisons :

Le travail de modélisation qui, d'objets matériels comme des baguettes, des formes géométriques, des solides, conduit à un ensemble structuré de grandeurs : longueurs, aires, volumes, puis à des ensembles structurés de nombres via la mesure, est, nous semble-t-il, un moyen privilégié, dès l'école élémentaire, pour aider l'élève à comprendre que les mathématiques ne se lisent pas dans le réel mais se construisent pour le rendre plus intelligible, pour piloter et rendre plus efficaces nos actions sur lui, comme le souligne N. Rouche dans [25].

Le travail sur les grandeurs est important pour penser les rapports entre mathématiques et réel. Il est aussi essentiel pour penser les rapports entre les mathématiques et les autres disciplines pour lesquelles les grandeurs sont fondamentales. En effet, les grandeurs ont une épaisseur épistémologique que les mesures ne peuvent avoir et qui est nécessaire à l'établissement de ces rapports. De plus, un aplatissement trop rapide sur les nombres peut masquer le fait que toutes les numérisations n'ont pas le même statut : certaines ont une valeur de mesure, d'autres n'ont valeur que de repérage et l'addition des « mesures » donc corrélativement celle

---

[20] On se réfère ici à une axiomatisation de la notion de grandeur, comme par exemple celle associée à la définition ci-après :
On appelle ensemble de grandeurs (sous-entendu de même nature) un ensemble G muni d'une relation d'ordre total (admettant un plus petit élément noté 0) et d'une addition (commutative, associative, admettant 0 comme élément neutre et compatible avec l'ordre) et satisfaisant de plus aux propriétés suivantes :

a) Soustraction des grandeurs : étant données deux grandeurs x et y avec $x<y$, il existe une grandeur z telle que $x+z=y$
b) Division des grandeurs : étant donnée une grandeur $x>0$ et un entier $n>0$, il existe une grandeur y telle que $ny=x$
c) Archimède : pour tout $x>0$ et tout y, il existe $n\in N$ tel que $nx>y$
d) Continuité : toute partie majorée de G admet une borne supérieure.

Ce n'est bien sûr pas la seule envisageable, et il faut donner à la notion de grandeur une acception plus large, si l'on veut pouvoir associer une grandeur à des quantités discrètes comme les prix, à des notions comme celle de température pour lesquelles soustraction et addition n'ont pas de sens physique, à des grandeurs bornées comme les angles. Ceci ne signifie pas qu'il faille pour autant en arriver à la définition donnée par d'Alembert dans l'Encyclopédie : « tout ce qui est susceptible d'augmentation et de diminution », définition dont il souligne lui-même l'inadéquation.

[21] On se rapportera au rapport de la Commission sur la géométrie en ce qui concerne l'importance de cet invariant.

de moyenne arithmétique n'ont pas de sens dans le monde des objets concernés (cf. par exemple la température, déjà citée).

La réduction numérique n'est pas sans effet non plus sur les moyens d'expression du calcul. Des écritures avec unités comme 1m=100cm font sens dans le monde des grandeurs, on peut les transformer, les combiner pour comprendre des relations entre grandeurs et en produire de nouvelles. La réduction numérique des mathématiques modernes avait conduit, en France, à les bannir, privant le calcul lié aux changements d'unités de moyens de transcription, de pilotage et de contrôle efficaces, accentuant de plus la coupure avec les pratiques de calcul des autres disciplines, comme le montrent Y. Chevallard et M. Bosch dans [26].

La réduction numérique a d'autres effets nocifs, bien identifiés dans diverses recherches didactiques, en particulier concernant longueurs et aires (cf. par exemple les travaux de R. Douady et M.J. Perrin [27]). En ramenant tout à un espace de dimension 1 : celui des réels, elle rend plus difficile la construction de la notion de dimension, pourtant fondamentale dès l'école élémentaire et favorise la confusion des grandeurs comme aire et périmètre, elle favorise aussi la réduction du calcul à l'application de formules sans contrôle, donc parfois hors de leur cadre de validité (l'aire d'un parallélogramme est calculée comme produit des longueurs des côtés), même lorsque des calculs ou des contrôles basés sur l'invariance de l'aire par découpage et recollement par exemple sont possibles.

Enfin, même si l'extension du champ des nombres, des entiers aux rationnels, décimaux et réels peut théoriquement s'effectuer sans référence aux grandeurs, on peut penser que c'est à travers des problèmes de mesure de grandeurs que les élèves peuvent vraiment ressentir, même très jeunes, le besoin mathématique de ces extensions.

Tout ce qui précède, et bien évidemment, la cohérence nécessaire avec les propositions faites pour l'enseignement de la géométrie, plaide pour une réhabilitation des grandeurs associée à une meilleure explicitation de leur statut, de leur rôle.

Prendre en compte les grandeurs ne signifie par pour autant oublier les mesures et les nombres. C'est via des processus de mesure, d'une croissante diversité, que des objets de plus en plus nombreux deviennent calculables. De ce point de vue, l'enseignement sous-estime généralement la complexité des problèmes de mesure. La mesure met en jeu en effet différents univers, comme le montre G. Brousseau dans [28]. Chaque univers se caractérise par des préoccupations, des problèmes, des situations différentes. Il y a d'abord l'univers des objets et de leurs usages qui sont essentiels pour déterminer la finalité, la nature et les modalités des mesures ; il y a l'univers des grandeurs associées à ces objets, grandeurs mesurables ou simplement repérables et celui des mesures analogiques que ces grandeurs permettent sans recours au numérique (on mesurera par exemple un poids par l'allongement d'un peson, soit une longueur) ; il y a l'univers de la mesure numérique mettant en jeu unités et donc changements d'unités[22] ; il y a l'univers pratique du mesurage et, associé à lui, tout ce qui relève de la métrologie, des erreurs, tolérances, intervalles de confiance, prenant en compte le fait que, le plus souvent, l'image d'un objet par l'application-mesure n'est pas un nombre mais un intervalle ou une distribution de probabilités ; il y a enfin ce qui relève d'un questionnement sur la taille de la mesure, son ordre de grandeur, sa « normalité » ou sa « rareté ». L'école élémentaire, par l'ouverture qu'elle permet plus naturellement du fait de la polyvalence de ses enseignants, a sans aucun doute un rôle à jouer pour commencer à

[22] Soulignons que ces changements d'unités jouent aujourd'hui dans un registre bien plus large. Ils allaient autrefois du milli au kilo, ils vont aujourd'hui couramment du pico (10^{-12}) au giga (10^9) et la Conférence générale des poids et mesure les a codifiés en octobre 91, en attribuant des prefixes aux 10^{3k} pour k allant de –8 (yocto) à +8 (yotta).

sensibiliser les élèves à cette complexité de la mesure, à la diversité des calculs et des problématiques qu'elle engage, fondamentale aux rapports des mathématiques et autres disciplines.

Nous ne voudrions pas terminer ce paragraphe dans lequel nous avons voulu marquer l'importance que nous trouvons nécessaire d'accorder aux grandeurs et mesures, dans les premiers contacts avec le calcul, sans souligner en sens inverse ce qu'apporte l'unification permise par le passage au nombre, un apport que l'enseignement se doit aussi de rendre sensible. C'est via le passage au nombre que le calcul s'affranchit des limitations liées à la modélisation en termes de grandeur évoquées au début de cette partie, qu'une symbolisation algébrique efficace peut se mettre en place et qu'un calcul polynomial essentiel au développement mathématique peut se développer par exemple. C'est via le passage au nombre que peut se mettre en place avec Fermat et Descartes une géométrie analytique qui combine dans ses calculs en toute liberté longueurs, aires et volumes, avec l'efficacité que l'on sait. C'est via le passage au nombre que se met en évidence enfin l'unité sous-jacente à des situations aussi diverses que celles relatives à des vitesses, des débits, des densités, des taux de change…, que des analogies productives peuvent s'établir entre les calculs qui les mettent en jeu : produit d'une vitesse par un temps de parcours pour obtenir une distance, produit d'un débit par une durée d'écoulement pour obtenir un volume, produit d'un volume par une densité pour obtenir une masse, produit d'une somme en euros par un taux de change pour obtenir une somme en francs… Tout en évitant un réductivisme numérique dont nous avons souligné les dangers, l'enseignement doit aussi faire sentir progressivement aux élèves, l'apport essentiel du passage aux nombres.

IV.5 EXTENSION DU CHAMP DU CALCUL AUX RATIONNELS ET DECIMAUX

L'extension du champ du calcul des naturels aux décimaux et rationnels constitue le premier cas d'enrichissement des objets du calcul que rencontre l'élève au cours de sa scolarité. Il pose des difficultés incontournables car, comme tout enrichissement, il nécessite une reconstruction des rapports au calcul. Longtemps, l'enseignement a été peu sensible à ces difficultés, en mettant l'accent sur la continuité du calcul : ainsi l'élève apprenait que, sachant déjà calculer avec des nombres entiers, il n'avait que peu à apprendre pour calculer avec des nombres décimaux, il lui suffisait d'apprendre où placer la virgule ! Divers travaux de recherche ont bien montré les difficultés résistantes de calcul que de telles stratégies d'enseignement favorisaient, contrairement à ce qui était attendu (cf. par exemple [29]). Les élèves notamment avaient tendance à considérer un décimal comme deux entiers séparés par une virgule et à investir cette conception dans leurs calculs (ex : $3{,}1^2=9{,}1$ ou $3{,}10>3{,}2$). Mais quelles que soient les stratégies d'enseignement choisies, on ne peut s'attendre à ce que le passage d'un calcul sur les entiers à un calcul sur les décimaux et rationnels se fasse sans difficulté. Ces difficultés sont en partie liées au fait que les élèves se construisent, à travers leur pratique du calcul sur les entiers, un certain nombre de connaissances implicites, de théorèmes en acte, selon la terminologie introduite par G. Vergnaud [30], sur les nombres et les opérations, qu'ils généralisent tout naturellement aux nouveaux objets qu'ils intègrent au champ des nombres. Ces connaissances servent en particulier pour piloter un calcul, anticiper des résultats possibles, contrôler ce qui est obtenu. Ainsi n'y-a-t-il rien d'étonnant à ce qu'un élève pense s'être trompé si, multipliant un nombre par un nombre plus petit que 1, il trouve un nombre plus petit, ou si faisant une division, il obtient un nombre plus grand que le nombre de départ. L'enseignement se doit d'être sensible aux difficultés inhérentes aux reconstructions nécessaires et à la résistance normale de conceptions et connaissances locales qui, pendant des années, ont été pertinentes et utiles.

V. DU CALCUL SUR LES NOMBRES AU CALCUL ALGEBRIQUE

Avec l'avancée dans la scolarité, le calcul va intégrer de nouvelles formes et de nouveaux objets. De ce point de vue, la révolution majeure pour l'élève est sans aucun doute l'entrée dans le calcul algébrique et c'est pourquoi nous lui consacrons un paragraphe spécifique.

V.1 LA REVOLUTION DU CALCUL ALGEBRIQUE

Le passage du calcul numérique au calcul algébrique constitue en effet une véritable révolution. Le fait de désigner une quantité : inconnue, variable, indéterminée, par une lettre et d'engager cette lettre dans les calculs au même titre que les quantités connues, accroît radicalement les potentialités du calcul. L'histoire des mathématiques l'atteste, comme elle atteste le temps qu'a nécessité la mise au point de ce calcul sous les formes qui nous semblent aujourd'hui « naturelles » : écriture littérale parenthésée, notations homogènes pour l'inconnue et ses puissances…, comme le montre dans sa thèse M. Serfati [31]. L'élève n'est pas immédiatement sensible à la puissance mathématique que lui confère ce calcul, et ce d'autant plus qu'il ne le manipule pas de façon sûre. La méthode algébrique l'oblige à réviser profondément ses stratégies de calcul : en arithmétique il progressait du connu vers l'inconnu, en produisant pas à pas des résultats intermédiaires. En algèbre, il s'agit pour lui d'établir des relations entre connu et inconnu, puis de calculer sur ces relations jusqu'à obtenir le résultat cherché. Il y a là un renversement de pensée dont l'enseignement sous-estime souvent la difficulté[23], en pensant qu'il suffit d'en montrer le fonctionnement à l'élève dans quelques cas (où souvent il ne s'impose d'ailleurs pas)[24] pour que sa nécessité s'impose. Parallèlement, les modes de contrôle de ce calcul sont profondément modifiés. Le calcul arithmétique était piloté par le sens du contexte, chacune des opérations effectuées pouvait s'y exprimer. Le calcul algébrique tire sa puissance de sa capacité à s'affranchir de ce sens « externe » et d'asseoir la légitimité des transformations effectuées sur des règles formelles. Ceci impose un pilotage du calcul différent, faisant intervenir le sens interne des expressions. Certes, une large partie de ce calcul, notamment celui lié à la résolution exacte d'équations et d'inéquations va rapidement s'algorithmiser, mais les erreurs récurrentes des élèves montrent bien la difficulté qu'ils rencontrent à maîtriser ce calcul, même lorsqu'il s'automatise, faute d'en contrôler le sens. Contrôler ce calcul impose de comprendre les règles qui gouvernent la formation et le traitement des expressions algébriques, et se démarquer d'une lecture de gauche à droite que la résolution des tâches arithmétiques ordinaires ne mettait généralement pas en défaut. La représentation d'expressions sous forme de schémas, d'arbres (cf. par

---

[23] Les enseignants débutants éprouvent des difficultés certaines à comprendre le renversement de pensée demandé à l'élève, eux qui ont le plus grand mal au contraire à réinventer des solutions arithmétiques. C'est le cas par exemple avec le problème suivant, que nous avons utilisé dans diverses formations : « les élèves d'une classe veulent se cotiser pour acheter un ballon de football à un de leurs camarades. Ils calculent que chacun doit payer 20F. Au dernier moment, trois élèves ne paient pas et les autres doivent payer chacun 5F de plus. Combien coûte le ballon ? » La solution arithmétique consistant à dire qu'il manque 60F et donc qu'il reste 12 élèves puisque 5x12=60, qu'il y a donc initialement 15 élèves et que le ballon coûte 300F n'apparaît jamais spontanément.

[24] C'est le cas par exemple avec les problèmes qui se traduisent directement par une équation de la forme : ax+b=c, comme le problème suivant : « On pense à un nombre, on le multiplie par 5 et on ajoute 3 au résultat. On obtient alors : 48. A quel nombre a-t-on pensé ? ». La stratégie naturelle à l'élève pour résoudre un tel problème consiste à partir du résultat et inverser les opérations pour récupérer le nombre de départ. Ce n'est plus possible, en revanche, si l'on transforme le problème initial de la façon suivante : « Deux élèves choisissent en commun un nombre. Le premier le multiplie par 5 et ajoute trois au résultat. Le second le multiplie par 8 et ajoute 1 au résultat. Ils constatent alors qu'ils ont de nouveau le même nombre. Peut-on trouver le nombre qu'ils avaient choisi ? », puisqu'il ne connaît ni le nombre de départ, ni celui d'arrivée.

exemple [32]), l'association de programmes de calcul à des expressions, la comparaison de tels programmes sont ici des activités décisives[25]. Quelques recherches récentes (cf. par exemple [23]) montrent aussi que l'utilisation de logiciels de calcul formel peut utilement appuyer un travail sur la syntaxe des expressions algébriques[26]. L'intérêt d'un tel travail est ordinairement mal perçu par les élèves en environnement papier/crayon, il apparaît ici comme nécessité par la communication avec le logiciel. D'autre part, il peut aider à distinguer ce qui, dans la formation des écritures relève de règles mathématiques et ce qui relève de conventions d'écritures (non nécessairement respectées par le logiciel).

Faire comprendre la puissance mathématique que donne le calcul algébrique, faire comprendre que, tout en ayant des modes de contrôle différents du calcul arithmétique, le calcul algébrique n'est pas un calcul aveugle, constituent des enjeux fondamentaux pour l'enseignement du calcul dans la scolarité obligatoire. Les diverses évaluations à grande échelle existantes[27] comme les travaux de recherche montrent cependant que, pour beaucoup d'élèves, ces prises de conscience, sans doute insuffisamment préparées[28], ne se font pas. Le calcul algébrique est affaire de contrat didactique et les dérapages formels y abondent.

V.2 L'INTELLIGENCE DU CALCUL ALGEBRIQUE

Ce qui précède nous conduit naturellement au second point que nous souhaitons aborder : celui de l'intelligence du calcul. Le calcul algébrique, calcul sur des relations, l'impose dès qu'il n'est pas automatisé, car il est très facile d'y tourner en rond. Cette intelligence va nécessiter un pilotage au sens des expressions manipulées, la reconnaissance de formes : formes factorisées, développées, formes canoniques, identités remarquables, configurations clefs... , chacune portant des informations spécifiques sur l'objet qu'elle désigne, rapprochant ou éloignant de la solution cherchée. Il y a là, sous-jacentes, des capacités de visualisation tout à fait analogues à celles évoquées dans le rapport sur la géométrie, et la connaissance d'un répertoire de formes, prolongeant le répertoire nécessaire à un calcul numérique raisonné, que nous avons déjà évoqué. Développer cette intelligence suppose bien sûr que l'on propose à l'élève des tâches de calcul qui ne soient pas complètement balisées, où il conserve une certaine autonomie, où des choix restent possibles. Ceci suppose aussi un minimum de complexité technique. Nous en donnerons en annexe quelques exemples. Ces exemples montreront également comment l'intelligence du calcul algébrique peut-être utilement soutenue par des visualisations, des traductions dans un autre cadre, en particulier les cadres géométriques et fonctionnels.

Il nous semble que l'enseignement aujourd'hui n'est pas suffisamment ambitieux à ce niveau. Même si l'on peut penser qu'à terme, le calcul algébrique sera, pour les élèves, assisté comme l'est aujourd'hui le calcul numérique, le pilotage et le contrôle économique de ce calcul

---

[25] On pourra se référer aux travaux de l'IREM de Strasbourg qui ont largement exploité des tâches de ce type [33]. Les comparaisons entre programmes menées sur la base d'entrées / sorties numériques permettent de montrer que des formulations en apparence voisines peuvent avoir des effets numériques très différents et qu'au contraire des formulations très différentes peuvent conduire à des systèmes équivalents, la preuve de cette équivalence étant ensuite du ressort d'un calcul symbolique.

[26] Un travail avec des calculatrices peut aussi bien sûr le permettre avec des moyens plus réduits. Il nous semble cependant nécessaire, pour que ce travail soit efficace et gérable par l'enseignant, que les calculatrices utilisées disposent d'un éditeur d'expressions qui permet de relire ce qui a été introduit.

[27] Evaluations de la DPE, évaluations APMEP, enquêtes internationales

[28] Un article comme celui de J.C. Duperret et J.C. Fenice [34], publié dans la revue Repères IREM, des travaux comme ceux de B. Grugeon, dont une synthèse est présentée dans [35], donnent une bonne idée de la diversité des tâches à prendre en compte pour assurer une telle préparation.

assisté nécessiteront justement une intelligence du calcul algébrique que l'enseignement peine aujourd'hui à développer.

V.3 LE CALCUL ALGEBRIQUE, OUTIL DE GENERALISATION ET DE PREUVE

Dans notre culture, l'entrée dans la rationalité mathématique est pensée en référence au raisonnement géométrique. Ceci n'est pas sans conséquence sur l'enseignement du calcul algébrique. L'entrée dans le monde algébrique est étroitement relié à la résolution d'équations et d'inéquations associées à diverses situations dites de vie quotidienne ou purement mathématiques. La fonction du calcul algébrique comme outil de généralisation et de preuve est mal assumée[29]. Il nous semble tout à fait essentiel de mettre mieux en évidence la fonction généralisatrice du calcul algébrique et sa valeur d'outil de preuve. Ceci peut se faire tôt avec des situations très simples, en se limitant aux objets familiers à l'élève que sont les nombres entiers. L'infinité des cas possibles y est sans aucun doute plus immédiatement sensible qu'en géométrie, le travail sur exemples et contre-exemples en est facilité. On peut viser des propriétés de divisibilité comme dans les cas classiques suivants : « le produit de trois nombres entiers consécutifs est-il pair ? est-il un multiple de 4 ? un multiple de 6 ? » ou le repérage d'une régularité numérique surprenante, comme dans la situation suivante : « choisis deux nombres dont la somme est 300 et fais leur produit. Ajoute 7 à chacun d'eux, de combien augmente le produit ? ». Le calcul algébrique sur une expression à deux variables va ici permettre de prouver que l'accroissement est constant. Il est d'ailleurs ici tout à fait intéressant de visualiser géométriquement ce calcul, en juxtaposant les deux rectangles de largeur 7 unités et pour former un rectangle de 7 unités sur 300 unités. Les élèves peuvent à leur tour fabriquer sur ce moule une infinité de problèmes, justiciables de traitements algébriques analogues et les expliciter. Deux autres exemples (la situation du quadrilatère qui tourne et celle de la bille) sont donnés en annexe, ils mobilisent cette fois le calcul algébrique dans le cadre fonctionnel, et des visualisations de type graphique ou géométrique.

V.4 CALCUL ALGEBRIQUE ET FORMULES

Par rapport à d'autres formes du calcul algébrique, le travail sur les formules joue un rôle tout à fait mineur dans l'enseignement obligatoire alors que, pour beaucoup d'élèves, en particulier ceux qui s'orienteront vers l'enseignement professionnel, c'est via l'usage de formules que vivra souvent le calcul algébrique. Nous voudrions souligner dans ce rapport l'intérêt mathématique du travail sur les formules, au-delà de sa nécessité évidente si l'on veut que s'établissent des rapports satisfaisants avec les autres disciplines scientifiques ou technologiques, sur laquelle nous n'insisterons pas davantage.

Le travail sur les formules, qu'il s'agisse d'exploiter des formules données, ou d'en élaborer, permet une première entrée dans le calcul littéral, sans mettre en jeu nécessairement tous les renversements de pensée, de modes de contrôle que nous avons évoqués plus haut. Mais, néanmoins, il ne se situe pas complètement dans la continuité des pratiques antérieures. La lettre cesse d'avoir pour seul statut celui d'étiquette, de marque d'unité dans un calcul sur les grandeurs, elle devient représentant d'un nombre quelconque, engagée dans les calculs au même titre que le nombre qu'elle représente. Il y a là une évolution essentielle et, en même temps, un moyen de faire sentir à l'élève la puissance du calcul algébrique, dans une perspective complémentaire de celle ouverte par l'approche en termes d'équations et

---

[29] Nous avons souvent constaté qu'elle n'est spontanément citée que par une minorité de professeurs stagiaires en réponse à la question : « A quoi sert l'algèbre ? » et qu'elle est particulièrement sous-représentée dans les activités qu'ils proposent aux élèves.

d'inéquations : il intervient ici comme outil au service de la généralisation. Ce travail peut être engagé relativement tôt comme le montrent diverses recherches, et a intérêt à ne pas être limité à un travail de lecture et d'exploitation de formules, même si ce dernier est essentiel. Le travail de production de formules, associé par exemple à des situations de dénombrement, est sans doute nécessaire pour ressentir en quoi consiste cette démarche de généralisation par passage au littéral et la puissance que nous donne le calcul algébrique, une fois la formule établie.[30] En fait, ce qui est en germe ici, c'est la pensée fonctionnelle et le calcul associé.

L'intérêt du travail sur les formules se situe également ailleurs. Le calcul algébrique, tel qu'il est perçu traditionnellement, en mathématiques dans le secondaire, comporte peu de variables quand il porte sur des équations et inéquations et se réduit à un calcul à une variable quand il est fonctionnel. Pourtant les situations, en particulier celles issues de la vie ordinaire ou des autres disciplines qu'on se donne l'objectif de modéliser, sont rarement des situations dépendant d'une seule variable. Le travail sur les formules doit permettre de contrer dès le début ce réductionnisme, en permettant de travailler aussi sur des situations où interviennent simultanément plusieurs variables, plusieurs formes de dépendance.

Nous avons centré notre réflexion sur les débuts du calcul algébrique et les enjeux associés pour l'enseignement. Ce calcul va rapidement s'étendre à de nouveaux objets : fonctions, polynômes et fractions rationnelles, vecteurs… Le calcul sur les fonctions, exact mais aussi approché, fera l'objet du paragraphe suivant. En ce qui concerne le calcul vectoriel, il nous semble important de souligner le point suivant. Avec lui, la notion de dimension que le travail sur les grandeurs avait permis d'aborder prend un autre sens et devient centrale. Calculer en dimension n, c'est calculer dans un espace où, une base étant choisie, on sait que tout objet est caractérisé de façon finie et a une écriture unique. La notion de dimension, rencontrée dès les débuts de l'enseignement élémentaire à travers le travail sur les grandeurs et les calculs liées aux changements d'unités et d'échelles, prend ainsi une autre signification. Bien sûr, elle est loin d'être ainsi épuisée. La rencontre avec des objets échappant aux classifications associées aux dimensions entières, comme les fractals, sera une nouvelle occasion de l'approfondir[31].

---

[30] L'ouvrage publié par l'INRP « Les débuts de l'algèbre au collège » ([36]) analyse de ce point de vue les potentialités de la situation suivante (adaptée au début du collège) : on borde un carré de côte 6cm extérieurement par des petits carrés de côté 1cm. Combien faut-il des petits carrés ? Et si le carré initial a 15 cm de côté ? 100cm de côté ? Peut-on trouver une formule qui permettrait de calculer dans tous les cas le nombre de petits carrés ? ». Dans une situation comme celle-là, les premiers calculs servent à donner sens à la recherche, le saut à 100cm à disqualifier le comptage basé sur un dessin intégral et à susciter le besoin de procédures de comptage. Malgré la simplicité du problème, diverses procédures de comptage sont possibles et apparaissent effectivement dans une classe. Elles peuvent être contrôlées géométriquement mais l'équivalence des formules peut aussi être testée numériquement ou justifiée formellement. La formule peut ensuite être exploitée à la fois pour trouver des valeurs particulières mais aussi pour se demander si tel ou tel nombre est accessible et, pourquoi pas, chercher à caractériser tous les nombres qui sont solution d'un tel problème.

[31] La dimension est alors prise au sens de Hausdorff et basée sur le concept de mesure extérieure introduit par ce dernier en 1918 [37]. L'idée est de recouvrir un corps par de petits corps pesants appartenant à un stock donné. La masse du corps est définie comme la limite de la borne inférieure des masses de tels recouvrements, quand la borne supérieure du diamètre des corps pesants du recouvrement tend vers 0. Si l'on se situe dans un espace euclidien et si l'on considère comme stock des boules euclidiennes de masse h(r) pour un rayon r, on parle de h-mesure. Si $h(r)=k.r^{\alpha}$, on parle de mesure en dimension α. La dimension d'une partie d'un espace euclidien est alors généralement définie comme la borne inférieure des réels positifs α pour lesquels la mesure de cette partie en dimension α est nulle. Si l'on transforme un objet par une similitude de rapport λ, sa mesure en dimension α est multipliée par λ^{α}. On montre ainsi que la dimension de l'ensemble triadique de Cantor est log2/log3, celle de la courbe de Von Koch : log4/log3, celle de la courbe de Peano : 2. C'est un exercice de calcul graphique que de construire des courbes ayant diverses dimensions.

VI. DU CALCUL ALGEBRIQUE A L'ANALYSE

Nous avons déjà évoqué un calcul fonctionnel dans le paragraphe précédent consacré au calcul algébrique mais l'enrichissement du calcul sur lequel nous voudrions nous centrer maintenant, c'est celui qui fait quitter au calcul le domaine des processus finis, pour mettre en jeu de façon incontournable l'infini, même si tout calcul effectif est par nécessité fini. A travers lui, le problème de la représentation de l'infini par le fini pour le rendre accessible au calcul se pose dans des termes renouvelés.

VI.1 UN APERÇU SUR L'EVOLUTION DE L'ENSEIGNEMENT

Pour penser le futur de l'enseignement du calcul fonctionnel, aujourd'hui objet de vifs débats, il n'est pas inintéressant de se pencher sur son histoire au cours de ce siècle et nous le ferons en nous appuyant sur l'analyse présentée par M. Artigue dans [38] . C'est avec la réforme de 1902 que l'enseignement du calcul différentiel et intégral se généralise dans l'enseignement secondaire. Il est rattaché dans les programmes à l'algèbre et introduit autant pour servir les besoins mathématiques propres que pour ceux des sciences physiques. C'est un calcul qui se veut rigoureux, libéré de la métaphysique des infiniment petits et efficace. L'introduction est un succès comme l'attestent divers textes parus dans la revue L'Enseignement Mathématique[32]. C'est essentiellement une analyse de type algébrique qui se met en place, basée sur le calcul de dérivées et primitives et les exploitations simples de ce calcul, mais on peut penser que les liens qu'elle entretient avec la géométrie, partie clef du programme, la cinématique et la mécanique, alors au programme de mathématiques, contribuent fortement à donner sens aux concepts introduits et aux calculs effectués. Cet enseignement restera relativement stable jusqu'au tournant des années soixante. L'enseignement du calcul différentiel et intégral se donne alors d'autres ambitions. Il s'agit de dépasser sa dimension de « calculus » au sens anglo-saxon du terme, pour en faire un enseignement d'introduction au champ de l'analyse mathématique et au rôle essentiel qu'y joue l'approximation[33]. Il ne s'agit pas là d'approximation au sens du calcul approché mais d'approximation comme outil fondamental de construction des concepts. La réforme des mathématiques modernes, tout en n'ayant pas l'analyse comme cible principale, renforcera les soucis de fondements de cet enseignement. La contre-réforme qui verra le rejet de ses valeurs au début des années 80, ne rejettera pas en analyse les valeurs de l'approximation, bien au contraire. Mais elle se donnera l'ambition de construire l'enseignement autour des problèmes centraux du champ (problèmes de variation, d'optimisation, d'approximation de nombres et de fonctions…) et des notions clefs pour leur résolution, au lieu de privilégier sa structuration logique. Elle aura l'ambition de développer sur l'enseignement du lycée une maîtrise raisonnable des techniques d'approximation, tout en limitant la formalisation au strict nécessaire[34]. De fait, les coûts des choix effectués, en particulier le coût de développement du calcul d'approximation visé, seront mal évalués et, l'évolution des conditions de l'enseignement aidant (massification de l'enseignement au lycée, réduction des horaires, suppression de la série C), ces choix deviendront de moins en moins viables. Les problèmes qui en étaient emblématiques, comme l'approximation de solutions d'équations via la méthode du point fixe et l'étude qualitative et

---

[32] On pourra notamment se référer à l'enquête internationale organisée par la CIEM en 1911 sur l'introduction du calcul différentiel et intégral dans les écoles moyennes dont le rapport est publiée par la revue en 1914.

[33] C'est d'ailleurs à cette époque que le mot analyse apparaît dans les programmes et que l'analyse prend son autonomie par rapport à l'algèbre.

[34] La brochure interIREM intitulée : « L'enseignement de l'analyse », publiée en 1981, illustre particulièrement bien ces positions épistémologiques.

quantitative de suites récurrentes, perdront progressivement toute substance pour les élèves : thème favori des problèmes de baccalauréat, adaptés à cette épreuve via un découpage standard en une suite de sous-questions enlevant toute autonomie à l'élève, ils deviendront pour eux de simples objets de bachotage. Aujourd'hui, en France comme dans de nombreux pays, l'enseignement de l'analyse est en crise. Son importance dans les programmes s'est considérablement accrue au fil du siècle[35], au fur et à mesure que s'affaiblissait l'enseignement de la géométrie et que sortaient des mathématiques mécanique, cinématique, astronomie qui aidaient ses concepts à prendre sens. Il a tendance, vu les difficultés rencontrées, à se réduire dans la pratique des classes à sa part algébrisée mais, dans le même temps, cette réduction est d'autant moins acceptable qu'elle semble limiter les ambitions de l'enseignement à ce que tout logiciel de calcul formel est capable de gérer presque instantanément. Dans ces conditions, on comprend bien que l'enseignement du calcul fonctionnel ait du mal à résister à la pression d'autres domaines mathématiques qui, tels les statistiques ou les mathématiques discrètes, revendiquent leur utilité sociale ou scientifique croissante. Il est sans doute nécessaire de prendre ceci en compte pour penser le futur du calcul fonctionnel, au lycée et corrélativement au début des études supérieures.

L'accès au champ de l'analyse et au monde de l'approximation est, on le sait aujourd'hui, difficile. Le temps disponible pour l'enseignement, les limites évidentes des compétences de calcul algébrique des élèves lorsque débute cet enseignement, imposent la modestie. Mais si le calcul en analyse se veut plus qu'un calcul fonctionnel formel, ce qui nous semble souhaitable, il doit arriver à faire comprendre ses valeurs essentielles, dans un calcul qui reste d'une complexité raisonnable. De ce point de vue, deux prises de conscience nous semblent essentielles à amorcer dès le lycée :

- comprendre que le calcul en analyse se différencie du calcul algébrique antérieur, par le jeu qu'il instaure en « local » et « global »,
- comprendre que c'est un calcul qui intègre de façon fondamentale la notion d'ordre de grandeur.

Il nous semble que ces prises de conscience peuvent s'amorcer avec des niveaux de formalisation et une technicité raisonnables.

VI.2 LES INTERACTIONS DANS LE CALCUL ENTRE LOCAL ET GLOBAL

Le rapport au linéaire nous semble particulièrement symptomatique de cette évolution. La maîtrise de l'étude de phénomènes globalement linéaires est un enjeu fondamental de la scolarité obligatoire. Le travail sur les phénomènes linéaires s'inscrit d'abord dans un travail sur la proportionnalité entre grandeurs, il se développe ensuite dans le cadre algébrique puis fonctionnel, à travers la manipulation de formules, l'étude des fonctions linéaires et affines, et les représentations graphiques associées. Avec l'entrée dans le champ de l'analyse, le rapport à la linéarité se modifie substantiellement. La linéarité, perçue de façon locale et non plus seulement globale, devient un élément clef de la conceptualisation et du calcul. Elle est à la base des concepts de vitesse et de dérivée mais aussi de concepts plus complexes comme par exemple celui de travail d'une force. Les calculatrices graphiques aujourd'hui permettent d'illustrer très facilement cette linéarité locale par des zooms successifs au voisinage d'un point. Elles permettent aussi de la problématiser. En effet, si au voisinage d'un point la représentation graphique d'une fonction tend à devenir droite, comment caractériser

[35] Dans les programmes de terminale du début du siècle, sur un programme de huit pages, la part réservée à l'algèbre était d'une page et ceci incluait le calcul différentiel et intégral.

mathématiquement ce phénomène ? Il est important ici de souligner que la visualisation permise ne permet en rien de contrôler l'ordre de l'approximation ; l'objet mathématique n'est donc pas donné mais à construire.

Un phénomène essentiel est que cette modélisation linéaire, bien que locale, permet de reconstruire le global : connaissant le champ des vitesses et la position initiale, on reconstruit la trajectoire. Connaissant un taux de variation, on reconstruit la dynamique d'un phénomène. Un jeu s'institue donc entre le « local » et le « global », donnant une nouvelle puissance au linéaire que l'enseignement se doit de faire ressentir. Différentes expériences montrent que ceci peut débuter relativement tôt, si en particulier on se situe dans un contexte cinématique et si l'on exploite la capacité de l'élève à piloter et contrôler ses propres mouvements[36].

Ce jeu entre local et global, essentiel au niveau conceptuel, a des répercussions évidentes en termes de calcul, même s'il reste souvent à l'arrière plan. Une fois établies par exemple les techniques de calcul de dérivées, ce calcul, lorsque les techniques s'appliquent, est un calcul algébrique. Il en est de même pour le calcul des primitives. De même, l'étude des variations d'un phénomène met d'abord en jeu globalement une fonction dérivée, son signe, ses zéros éventuels. C'est, dans l'étude au voisinage de points particuliers, dans celle des comportements asymptotiques, que le local réapparaît dans le calcul et qu'apparaissent étroitement imbriquées deux caractéristiques nouvelles du calcul : l'intégration des ordres de grandeur sur laquelle nous reviendrons dans le paragraphe suivant, le fait de travailler au voisinage d'un point, et non pas sur un voisinage donné mais sur une succession de voisinages qui se construisent au fil du calcul, en fonction des contraintes qu'il rencontre. Même s'il s'appuie sur des compétences algébriques anciennes, le calcul devient alors profondément différent dans ses techniques et ses stratégies[37].

VI.3 L'INTEGRATION DES ORDRES DE GRANDEUR

Nous avons déjà mentionné l'importance qu'il nous semblait falloir attribuer dans le calcul aux ordres de grandeur : dès l'école élémentaire où le raisonnement sur les ordres de grandeurs constitue un moyen privilégié de contrôle du calcul manuel ou instrumenté, au collège à travers le travail sur les puissances de 10, en relation avec les autres disciplines et la mesure des grandeurs. Avec l'analyse, les ordres de grandeur entrent de façon essentielle dans le calcul lui-même. Même si le calcul s'appuie sur des techniques numériques et algébriques familières, il doit en effet apprendre à intégrer une différenciation des termes suivant les

---

[36] C'est le cas notamment dans les recherches développées autour du logiciel « Math-car » dans lequel les élèves doivent piloter des vitesses pour produire des trajectoires imposées (cf. par exemple [39]). Mais, avec une technologie plus élémentaire, on peut tout à fait le ressentir physiquement, en essayant de tracer une trajectoire compatible avec un champ de vecteurs produit par exemple à l'aide d'un ordinateur, une première étape qui nous semble essentielle à l'étude des équations différentielles trop souvent enfermée dans une résolution purement algébrique. On pourra sur ce domaine particulier se référer à [40].

[37] Illustrons ceci par une expérience récente avec des étudiants de CAPES. Ayant à étudier la nature d'une série, en l'occurrence, la série de terme général $u_n= (-1)^n n\ln(n)/(n^2+1)$, ils reconnaissent une série alternée dont le terme général tend vers 0 et veulent montrer que la suite $(|u_n|)$ est décroissante à partir d'un certain rang. Pour ce faire, ils introduisent la fonction d'une variable réelle associée et cherchent à montrer sa décroissance pour x suffisamment grand. La dérivée est relativement complexe : $f'(x)=((1-x^2)\ln(x)+1+x^2)/(1+x^2)^2$. Très peu d'étudiants sauront gérer le calcul de façon économique, en prenant en compte son caractère local et en déduisant par exemple du fait que la limite du numérateur de cette expression est moins l'infini en plus l'infini, elle est forcément négative pour x suffisamment grand puisque son dénominateur est toujours positif. La quasi-totalité des étudiants ne seront pas sensibles à ce caractère local et se sentiront obligés de déterminer le signe de la dérivée sur tout R^+, ceci conduisant à un calcul tout à fait différent et relativement pénible.

ordres de grandeur. Tout n'est plus dans une expression algébrique au même niveau, il faut apprendre à reconnaître les termes dominants, et le calcul traitera différemment ce qui est dominant et ce qui est négligeable. Il nous semble que, dès les premiers contacts avec le monde de l'analyse, il est important de faire comprendre aux élèves le changement profond que cette intégration des ordres de grandeur fait subir au calcul. Il faut apprendre à lire les expressions avec ce nouveau point de vue pour pouvoir piloter et mener le calcul. Ceci peut et doit se faire avec une formalisation réduite, de type algébrique, si l'on considère les objets à maîtriser à ce niveau, tant pour les besoins des mathématiques que des autres disciplines et les leçons du passé, lointain ou proche. Ceci impose d'avoir une notion de négligeabilité relative qui peut être introduite à partir d'explorations numériques sur des objets simples. L'exploitation, individuelle ou même simplement collective de logiciels de calcul formel peut aussi aider ici le travail des élèves, en permettant des transformations rapides d'expressions, pour aider à séparer les termes dominants dans les expressions au voisinage de tel ou tel point, et rendre possible des comparaisons et des raisonnements dont les élèves perdraient le fil s'ils avaient à gérer l'intégralité du calcul. A l'université, cette prise en compte des ordres de grandeurs trouvera des instruments opératoires dans les notations de Landau en o et O, dans la notion d'équivalence entre objets fonctionnels, mais ceci serait tout à fait prématuré au niveau du lycée où la fonction a déjà à se constituer en objet.

VI.4 LES DEUX ASPECTS DU CALCUL INTEGRAL ET LES LIENS AVEC LES AUTRES DISCIPLINES

Le calcul intégral a deux facettes dès ses niveaux les plus élémentaires : celle d'un calcul inverse du calcul différentiel (le point de vue primitive), celle d'un calcul destiné à rendre compte de la sommation infinie de contributions élémentaires (le point de vue intégrale définie). Si l'on veut construire une mathématique efficace dans ses rapports avec les autres disciplines et notamment la physique, il nous semble important de faire vivre ces deux facettes, en respectant ce qui fait la spécificité de chacune. Dans un certain nombre de situations, ce qui est accessible directement, c'est une variation et un taux de variation (désintégration radioactive, variation d'une population, vitesse de rotation d'un moteur...). Ce qui est mesuré n'est pas en général directement un taux de variation instantané mais la variation entre deux instants rapprochés ou par unité de temps et la traduction en termes de vitesse résulte d'un passage à la limite que le physicien ou biologiste gomme en écrivant directement les relations en termes différentiels et en jouant sur la polysémie des notations différentielles, et que le mathématicien explicite plus souvent en passant des accroissements Δ aux dérivées ou aux différentielles. On aboutit alors à une équation différentielle dont la recherche de solutions exactes, quand elle est possible, va conduire à des calculs de primitives. Dans d'autres situations, ce n'est pas le point de vue variation qui est le point de vue naturel, c'est la vision d'un phénomène résultant de la sommation de contributions élémentaires. C'est le cas par exemple quand, en mécanique, on calcule des moments d'inertie, quand en dynamique, on étudie des phénomènes d'attraction entre objets non ponctuels, en électricité quand on calcule le champ créé en un point par une certaine répartition de charges dans l'espace, ou le champ électro-magnétique induit en un point par un conducteur parcouru par un courant. Ce qui va être essentiel ici c'est de voir comment s'organisent ces contributions élémentaires que l'on va sommer en découpant judicieusement l'espace, pour approcher localement le variable par du constant, puis en passant à la limite. Le calcul de l'aire sous la courbe représentative d'une fonction continue positive f sur un intervalle I en est un exemple paradigmatique qui permet en plus de visualiser, si l'on s'appuie sur une notion intuitive d'aire, les liens entre les deux points de vue : si A(x) désigne l'aire de la surface délimitée par l'axe des abscisses, la courbe, et les deux droites parallèles à

l'axe des ordonnées passant par les points (a,0) et (x,0), a étant une origine fixée dans I, A est une fonction dérivable sur I, de dérivée f. Si l'on veut faire du calcul intégral vu en mathématiques, un calcul qui ne soit pas coupé des pratiques, il importe que ce second point de vue soit aussi présent et que l'on mette en évidence l'unité des pratiques derrière des découpages spatiaux différents[38]. Ce qui précède ne doit pas être compris comme un plaidoyer pour une introduction de l'intégrale au lycée via l'intégrale de Riemann, ce qui nous semble tout à fait irréaliste. Mais il nous semble important, en se basant sur l'exemple paradigmatique des aires, de montrer aux élèves l'analogie profonde qui existe entre des calculs rencontrés dans des contextes divers. Ceci peut être fait sur quelques exemples judicieusement choisis comme celui du calcul de moment d'inertie que nous avons évoqué en note, exemples qui à leur tour prendront ensuite une valeur paradigmatique. Au niveau universitaire, ces questions pourront être reprises et théorisées dans le contexte de l'intégrale de Riemann et l'on trouvera dans l'annexe d'exemples la description d'une situation : la situation du barreau[39] qui a fait l'objet de diverses expérimentations en DEUG première année et semble bien adaptée pour ce type de travail.

VI.5 CALCUL EXACT, CALCUL APPROCHE, APPROXIMATION

Comme nous l'avons déjà souligné, dans le champ de l'analyse, l'approximation devient un élément clef de la conceptualisation. Cette approximation à portée théorique est sous-jacente à la fois au calcul exact et au calcul approché. Son statut est cependant souvent mal perçu par les étudiants, y compris les étudiants relativement avancés. Ceci se manifeste en particulier dans la façon dont ils conçoivent le rôle de l'approximation dans le passage du local au global. Des travaux comme la recherche maths-physique sur les procédures différentielles et intégrales rapportée en [42] montrent qu'ils ont en particulier des difficultés à distinguer les approximations faites dans un processus de modélisation de cette approximation théorique qui permet de remonter du local au global[40]. Il y a sans aucun doute un effort à faire, au début de l'université, pour les étudiants scientifiques, en vue de clarifier les fonctions de l'approximation en analyse. Ce n'est pas la seule construction des notions, si soignée fût-elle, qui semble-t-il peut y suffire. Un enrichissement des contextes mathématiques et de meilleures connections entre mathématiques et autres disciplines sont ici nécessaires.

Avec l'analyse d'autre part, les rapports entre calcul exact et calcul approché entrent dans une nouvelle phase. L'analyse va fournir de nouveaux outils, de nouvelles méthodes pour conduire et contrôler les calculs approchés, elle va aussi confronter les élèves et étudiants à de vastes champs de problèmes où seule une résolution approchée est accessible. En fait, les rapports entre calcul exact et calcul approché dans l'analyse enseignée sont, nous semblent-il déséquilibrés, en particulier dans les premières années d'université, au profit du calcul exact.

---

[38] Par exemple, lorsque pour calculer le moment d'inertie d'un disque homogène par rapport à un axe perpendiculaire au plan du disque et passant par son centre, en mécanique, on découpe le disque en couronnes concentriques parce que le moment d'inertie d'une masse ponctuelle m est mr^2 si r est sa distance à l'axe et que donc le découpage spatial doit être pensé par rapport à la variable r.

[39] Cette situation est due à M. Legrand et pour une analyse plus détaillée, on peut se référer à [41].

[40] Dans la recherche maths-physique citée, des étudiants d'université de divers niveaux et de classes préparatoires ont été confrontés à des problèmes classiques, comme par exemple celui du calcul de la pression exercée par l'eau sur un barrage, en assimilant ce barrage à un rectangle. Le calcul était chaque fois donné, rédigé à la physicienne, et l'on demandait aux étudiants de dire si à leur avis le résultat était exact ou approché en justifiant leur réponse. La très grande majorité des étudiants affirme que le résultat est approché mais la plupart ne font pas référence à des approximations de modélisation, c'est le calcul intégral lui-même effectué via un découpage en tranches élémentaires et un passage à la limite qui est jugé approché.

L'enseignement des équations différentielles nous en semble une illustration parfaite. Alors que seule une petite minorité d'équations différentielles sont susceptibles d'un calcul exact, alors que l'évolution mathématique actuelle met clairement en évidence l'intérêt des approches numériques et qualitatives, l'enseignement reste centré sur l'intégration exacte, dans sa vision catalogue la plus réductrice, particulièrement bien prise en charge par tous les logiciels de calcul formel. D'autres organisations plus équilibrées sont pourtant possibles, même avec des débutants dans ce domaine, en particulier avec l'assistance de logiciels permettant de visualiser champs de vecteurs et de tangentes, portraits de phase, d'explorer et comparer diverses méthodes d'intégration numérique (cf. [40] déjà cité et les divers textes relatifs aux expériences menées depuis plus de dix ans à l'université de Lille 1 [43]).

Ce déséquilibre entre calcul exact et calcul approché nous semble aussi interdire que se travaillent sérieusement les rapports entre discret et continu particulièrement importants dans le calcul en analyse. L'étude des systèmes dynamiques discrets et continus peut jouer ici un rôle paradigmatique, vu la richesse des phénomènes qu'elle permet de mettre en évidence dans ces rapports entre discret et continu.

L'accent est mis de façon déséquilibrée sur le calcul exact à l'université mais, dans le même temps, il s'agit d'un calcul exact qui n'intègre que très marginalement les instruments qui sont ceux de ce calcul exact aujourd'hui. Si l'intérêt d'une utilisation massive d'outils de calcul formel au lycée peut-être discuté, il nous semble qu'au niveau de l'université, l'intégration au calcul, en analyse comme en algèbre, des instruments de calcul formel, incluant les problématiques qui lui sont spécifiques, s'impose.

Nous avons, au début de cette partie, retracé un bref historique de l'enseignement des débuts de l'analyse au siècle dernier et souligné son état de crise actuel. Cet état de crise a des raisons multiples, comme nous avons essayé de le montrer, internes au champ propre de l'analyse et de son enseignement mais aussi externes. Sans aller au-delà de ce que permet ce présent rapport qui n'approche les différents domaines mathématiques qu'à travers le prisme du calcul, nous voudrions souligner l'erreur qu'a sans doute constitué, compte-tenu des contraintes de l'enseignement secondaire, le choix d'ambitions épistémologiquement compréhensibles mais pratiquement irréalistes. Nous voudrions aussi insister sur l'appauvrissement des rapports possibles aux objets de l'analyse qui a été induit par la sortie du champ des mathématiques de domaines comme la mécanique, la cinématique, l'astronomie qui lui étaient traditionnellement rattachés et le sont encore dans divers pays. Il s'agit là d'un appauvrissement qu'une théorisation plus ambitieuse ne pouvait compenser et n'a pas compensé. Il n'y a bien sûr pas lieu ici de se situer dans la nostalgie d'un passé révolu et trop facilement idéalisé, mais il est sans aucun doute essentiel pour penser le futur de l'enseignement de l'analyse et le rôle du calcul dans cet enseignement de sortir des frontières qui se sont petit à petit imposées à l'enseignement. Ainsi la rencontre de phénomènes dépendant du temps, dans un contexte cinématique ou dans des contextes plus larges, a sans doute a être plus systématiquement sollicitée qu'elle ne l'a été dans un passé récent, pour donner sens aux concepts et calculs de l'analyse et permettre d'amorcer de façon relativement simple les jeux complexes entre discret et continu qui s'y jouent[41]

VII. SYNTHESE ET RECOMMANDATIONS

Dans ce rapport d'étape, nous avons voulu aborder de façon globale la question du calcul sur l'ensemble de la scolarité. Nous l'avons fait en privilégiant quelques questions qui nous

[41] Les recherches menées depuis plus de vingt ans dans ce domaine par le Groupe AHA à Louvain la Neuve sont sur ce plan instructives et on pourra se référer aux ouvrages qui en sont issus pour l'enseignement [44] et [45].

semblaient particulièrement importantes pour penser l'enseignement du calcul et ses évolutions souhaitables : celles des rapports entre calcul et raisonnement, des rapports entre calcul exact et calcul approché, de l'influence sur le calcul des instruments qui l'outillent. Nous avons aussi voulu souligner la complexité du monde du calcul, sa richesse, son évolution permanente, le rôle essentiel qu'il joue dans le développement interne des mathématiques comme dans les rapports des mathématiques aux autres sciences. Nous avons enfin voulu pointer un certain nombre de conquêtes majeures qui marquent l'apprentissage dans ce domaine, les difficultés incontournables qui marquent ces conquêtes successives, des difficultés que l'enseignement a souvent du mal à gérer de façon satisfaisante.

Il n'est pas dans nos intentions de tirer de cette réflexion une programmation de l'enseignement du calcul de la maternelle à l'université. Comme nous l'avons souligné dès le départ, nous pensons qu'il n'y a pas de vérité absolue en matière d'enseignement du calcul.

Il nous semble cependant qu'un certain nombre de recommandations se déduisent de la réflexion menée et nous les précisons ci-après.

<u>Renforcer tout au long de la scolarité les rapports entre raisonnement et calcul</u>

Les premiers contacts avec le monde du calcul, à l'école élémentaire, ont un rôle clef à jouer dans ce renforcement, à travers des activités de calcul mental, à travers le développement de moyens de contrôle efficaces du calcul papier/crayon et instrumenté, à travers la rencontre de situations suffisamment complexes pour nécessiter le développement de stratégies de calcul[42]. Il importe aussi d'associer davantage des situations numériques puis algébriques à l'entrée de l'élève dans la rationalité mathématique, au-delà des situations géométriques que l'enseignement tend à privilégier et, au sein de ces dernières mêmes, de ne pas oublier que le calcul est souvent une méthode de résolution particulièrement économique[43]. Renforcer les rapports entre raisonnement et calcul suppose aussi que l'on ne minimise pas la spécificité des raisonnements propres à chaque type de calcul. L'enseignement doit y être tout particulièrement attentif dans le passage de calculs déterministes à des calculs statistiques et probabilistes, obligeant à gérer l'incertain[44].

Renforcer les rapports entre raisonnement et calcul, développer l'intelligence du calcul, ne saurait être vu en opposition avec le renforcement souhaité par ailleurs d'approches algorithmiques. Ceci d'autant plus que l'évolution technologique substitue en partie à des besoins qui s'exprimaient en termes de capacités d'exécution d'algorithmes, des besoins qui s'expriment en terme de contrôle d'exécution et d'étude de performances d'algorithmes.

<u>Viser le développement d'un calcul instrumenté de façon intelligente et contrôlée :</u>

L'enseignement doit, dans la définition de ses objectifs, de ses contenus et de ses méthodes, prendre véritablement en compte ce que sont les pratiques de calcul aujourd'hui dans le monde scientifique, professionnel et dans la société. Le calcul y est technologiquement assisté par des outils puissants. L'enseignement doit garantir d'une part des compétences de calcul simple, oral ou écrit et viser d'autre part une maîtrise intelligente du calcul assisté par des calculatrices et logiciels. Cette évolution des objectifs déplace les besoins en connaissances et

---

[42] Nous en donnons quelques exemples paradigmatiques dans l'annexe, concernant les différents niveaux d'enseignement. Un ouvrage comme celui publié en 1999 par l'équipe ERMEL de l'INRP [46] montre clairement que ceci est possible dès l'école élémentaire.

[43] Le complément au rapport sur la géométrie de la commission rédigé par J.C. Duperret, D. Perrin, J.P. Richeton l'illustre de façon particulièrement convaincante à travers l'analyse comparée de diverses méthodes de résolution pour des problèmes de géométrie plane.

compétences mais elle ne les réduit pas. Elle nécessite le développement de situations spécifiques, permettant d'articuler efficacement, dans la durée, apprentissages mathématiques et apprentissages instrumentaux.
La maîtrise du calcul suppose des compétences techniques, la mémorisation d'un répertoire de résultats, de formes, de stratégies. Une vision naïve tend à laisser penser, à tort, que l'instrumentation du calcul permet d'éviter tout travail de mémorisation. Elle n'est pas facilement mise en défaut si l'élève ne rencontre que des situations de calcul que l'instrumentation trivialise. Il est donc nécessaire de sortir du seul registre de ces situations dans le travail assisté par machine, tout en gardant au calcul une complexité raisonnable. Cette complexité ne saurait être bien sûr évaluée de façon absolue, elle est propre à chaque type d'environnement.
L'instrumentation du calcul a aussi sans doute un autre rôle à jouer, de façon plus marginale. Pour certains élèves, une fiabilité insuffisante du calcul écrit est un véritable handicap. Même si nous reconnaissons l'importance du développement de compétences de calcul, il nous semble qu'un calcul peu sûr ne devrait pas constituer un blocage à toute activité mathématique (une orthographe incertaine n'interdit pas l'écriture !). Dans ces conditions, un calcul assisté, même dans des cas que l'on voudrait voir maîtrisés sans machine, peut être le moyen de permettre à certains un travail mathématique et des apprentissages, qui seraient impossibles sans assistance.

<u>Equilibrer les rapports entre calcul exact et approché :</u>

Les rapports entre calcul exact et approché doivent être pensés de façon plus équilibrée, en respectant les spécificités de chaque type de calcul, en mettant en évidence la complémentarité de leurs démarches, sans hiérarchie de valeurs abusives. Dès les débuts de la scolarité, le travail sur les ordres de grandeur permettant des anticipations et des contrôles peut contribuer au développement d'un calcul approché. Il nous semble important de poursuivre dans cette direction au collège, en relation avec les autres disciplines et de mettre en évidence, au-delà de l'homogénéité de la droite réelle, les différences d'échelles dans le numérique qui jouent un rôle essentiel dans la modélisation des phénomènes. Ceci préparera aussi l'intégration nécessaire des ordres de grandeur au calcul en analyse.
Un meilleur équilibre entre calcul exact et approché, en liaison avec l'instrumentation souhaitée du calcul par des logiciels de calcul scientifique, est particulièrement nécessaire au début de l'université.

<u>Diversifier les rapports au calcul suivant les filières :</u>

Nous avons souligné dans ce rapport la diversité des facettes mathématiques du calcul, la spécificité de ses formes suivant les objets qu'il engage et les problèmes qu'il veut résoudre. Ceci nous semble imposer, au delà d'un tronc commun du calcul, dans la scolarité obligatoire, une plus grande diversification du calcul suivant les filières, si l'on veut éviter des rencontres trop superficielles avec tel ou tel type de calcul. Le tronc commun du calcul nous semble pouvoir être constitué par un calcul numérique et algébrique, non restreint à la résolution des équations et inéquations mais intégrant des rudiments de calcul fonctionnel exact. Il nous semble aussi falloir ménager, à côté de contextes déterministes classiques, une place raisonnable aux contextes statistique et probabiliste, reflétant en cela les besoins tant scientifiques que sociaux.
Mais, au delà de la scolarité obligatoire, il nous semble nécessaire de diversifier réellement l'enseignement, en choisissant pour chaque filière les formes de calcul les mieux susceptibles

de nourrir la culture mathématique des élèves, d'interagir avec les autres disciplines et de répondre aux besoins de la formation professionnelle.
Dans notre pays, très longtemps, les programmes d'enseignement ont été conçus, par affaiblissements successifs à partir de ceux d'une filière d'excellence. Cette conception est incompatible avec les réflexions qui précèdent. Au cours de la deuxième moitié du siècle, comme nous l'avons souligné, l'enseignement de l'analyse a ainsi progressivement envahi l'espace de l'enseignement des deux dernières années du lycée, laissant peu de place pour d'autres domaines mathématiques, dans toutes les filières. La place importante qu'il occupe, à condition qu'il soit rénové, se justifie dans certaines filières scientifiques et professionnelles. Dans d'autres filières, ce n'est pas le cas et, même si l'on estime important de faire rencontrer aux élèves par exemple des calculs mettant en jeu des processus infinis, d'autres choix sont possibles ; le calcul mathématique peut notamment privilégier le discret par rapport au continu.

Enrichir les contextes mathématiques du calcul et renforcer les rapports avec les autres disciplines :

Si l'on étudie l'évolution du calcul au fil du siècle, on voit que ses champs d'intervention dans le secondaire se sont rétrécis au fur et à mesure que sortaient du champ des mathématiques enseignées des domaines appartenant aux sciences mathématiques, et que se réduisaient ainsi des champs d'interaction possibles avec la physique[45]. Il nous semble important, pour contribuer à donner sens au calcul, d'enrichir les contextes mathématiques du calcul et de renforcer les liens avec les autres disciplines. Le travail sur grandeurs, mesures et dimensions s'y prête tout à fait dès l'école élémentaire. Le calcul statistique, à partir du collège, peut permettre d'élargir les interactions en direction d'autres disciplines comme la biologie, la géographie, les sciences économiques et sociales. Le calcul fonctionnel en analyse, le calcul probabiliste et le calcul sur des objets discrets ouvrent, dans les dernières années du lycée et à l'université, d'autres perspectives. Tout ceci nécessite une certaine cohérence dans l'établissement des programmes mais la cohérence des programmes ne saurait suffire. Cela nécessite aussi des dispositifs de travail, des ressources pour les enseignants, des moyens et des formations qui favorisent une interaction nécessairement coûteuse et difficile à initier et la rendent viable dans la durée.

Prévoir les équipements nécessaires :

Le calcul, nous avons insisté sur ce point, est à penser dans l'avenir comme un calcul technologiquement assisté. Ceci suppose des moyens et nos recommandations rejoignent sur ce point celles émises dans le rapport « Informatique et enseignement des mathématiques » de la commission : demande de laboratoires de mathématiques dans chaque établissement, demande de dispositifs de rétro et video-projection d'écrans d'ordinateur et calculatrices mobiles permettant de gérer collectivement en classe des calculs instrumentés et la réflexion sur ces calculs. Ceci est absolument nécessaire si l'on veut faire des outils de calcul des instruments réels du travail mathématique de l'élève.

Adapter la formation des enseignants :

[45] Si l'on excepte bien sûr l'enseignement professionnel où cette interaction maths-physique est favorisée par la double valence des enseignants de mathématiques.

Une formation des enseignants s'impose sur les différents points que nous avons indiqués. Il y a des résistances culturelles à surmonter ; il y a un manque de familiarité certain avec les formes de calcul qui n'existent pas traditionnellement dans l'enseignement, en particulier tout ce qui relève des mathématiques discrètes, du calcul statistique et probabiliste, de l'algorithmique ; il y a un manque de familiarité certain avec les logiciels de calcul scientifique et, au-delà, avec tout ce qui relève de la gestion des apprentissages mathématiques et de l'enseignement dans des environnements instrumentés ; il y a enfin une méconnaissance profonde de la façon dont les outils de calcul mathématique fonctionnent dans les autres disciplines. Dans les conditions actuelles de formation des enseignants, tous ces besoins ne peuvent être satisfaits au cours de la formation initiale. Il y a sans doute des priorités à donner : lutter contre les obstacles épistémologiques et didactiques à la mise en place d'un rapport satisfaisant au calcul, dans ses contenus usuels ; ouvrir sur de nouvelles formes de calcul ; familiariser les étudiants avec les instruments actuels du calcul dans le cadre de leur propre pratique mathématique, par exemple. Et il est aussi bien sûr souhaitable que les épreuves de recrutement des enseignants évoluent dans ce sens. Une formation continue substantielle doit ensuite prendre le relais, permettant de former au sein de chaque établissement, des équipes d'enseignants dont les compétences se complètent efficacement. Nul enseignant ne peut avoir aujourd'hui l'ambition de maîtriser le calcul dans sa diversité et la complémentarité des compétences au sein d'équipes doit être travaillée et construite. Une formation continue de qualité se doit aussi d'être substantielle. Ce n'est pas en quinze heures ou vingt heures que l'on apprend à maîtriser raisonnablement des formes de calcul qui sont nouvelles ou peu familières, les concepts sous-jacents et à penser, de façon efficace, leur intégration à l'enseignement.

REFERENCES

[1] Mumford D. (2000). The dawning of the age of stochasticity, in V. Arnold, M. Atiyah, P. Lax and B. Mazur (Eds.) *Mathematics: Frontiers and Perspectives*, AMS.

[2] Commission inter-IREM Epistémologie et histoire des mathématiques (Eds.) (1994). *Histoire d'algorithmes, du caillou à la puce*. Editions Belin, Paris.

[3] Jozeau M.F. (1997). *Géodésie au XIXème siècle : de l'hégémonie française à l'hégémonie allemande.* Thèse de doctorat, Université Paris 7.

[4] Mallat S. (1998). Applied mathematics meets signal processing. *Documenta Mathematica*. Extra Volume ICM 1998. T.1. 319-338.

[5] Kahane J.P., Lemarié-Rieusset. (1998). *Séries de Fourier et ondelettes*. Editions Cassini, Paris.

[6] Tournès D. (2000). Pour une histoire du calcul graphique, *Revue d'Histoire des Mathématiques,* vol. 6, 127-161.

[7] Tournès D. (1996). *L'intégration approchée des équations différentielles ordinaires (1671-1914).* Thèse de doctorat, Université Paris 7 Denis Diderot.

[8] Davenport J., Siret Y., Tournier E. (1986). *Calcul formel*. Masson, Paris.

[9] Cohen A.M., Cuypers H., Sterk H. (Eds.) (1998). *Some tapas of computer algebra*. Springer Verlag.

[10] Cox D., Little J., John, O'Shea D. (1992). *Ideals, Varieties and Algorithms*. Springer Verlag.

[11] Hackbusch W. (1998). From classical numerical mathematics to scientific computing. *Documenta Mathematica*. Extra Volume ICM 1998. T.1. 235-254.

[12] Commission inter-IREM Epistémologie et histoire des mathématiques (Eds.) (1998). *Images, Imaginaires, Imaginations, Une perspective historique pour l'introduction des nombres complexes*. Editions Ellipses, Paris.

[13] Dorier J.L. (1997). Une lecture épistémologique de la genèse de la théorie des espaces vectoriels, in J.L. Dorier (Ed.) *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*, pp. 27-102, La Pensée Sauvage, Grenoble.

[14] Kahane J.P. (2000). Quelques aspects des définitions mathématiques. *Bulletin de l'UPS* n° 189, 10-14.

[15] Poincaré H. (1904). Les définitions en mathématiques, *L'Enseignement des Mathématiques*, n°6, 255-283.

[16] Butlen D., Montfront A.M., Pezard M. (2000). Le role du calcul mental dans la connaissance des nombres, des operations et dans la resolution de problèmes. *Repères IREM* n° 41, 5-24.

[17] Briand J. (1993). *L'énumération dans le mesurage des collections. Un dysfonctionnement dans la transposition didactique*. Thèse de doctorat. Université de Bordeaux I.

[18] Bouleau N. (1999). *Philosophie des mathématiques et de la modélisation*. Editions l'Harmattan, Paris.

[19] Bronner A. (1997). *Etude didactique des nombres réels, idécimalité et racine carrée*. Thèse de doctorat. Université de Grenoble I.

[20] Dehaene S. (1996). *La bosse des maths*. Editions Odile Jacob, Paris.

[21] Brousseau N. , Brousseau G. (1986). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire.* IREM de Bordeaux.

[22] Douady R. (1984). Dialectique outil/objet et jeux de cadres. Un réalisation dans tout le cursus primaire. Thèse d'Etat. Université Paris 7.

[23] Guin D. (Eds.) 1999. Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques. *Actes du colloque francophone européen de La Grande Motte*, mai 1998. IREM de Montpellier.
[24] Lebesgue H. (1956). *La mesure des Grandeurs*. Gauthier-Villars, Paris.
[25] Rouche N. (1992). *Le sens de la mesure*. Didier Hathier, Bruxelles.
[26] Chevallard Y., Bosch M. (2000). Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie I. Une atlantide oubliée. *Petit x*, 5-32.
[27] Douady R., Perrin M.J. (1989). Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. Educational Studies in Mathematics, vol. 20, n°4, 387-424.
[28] Brousseau N., Brousseau G. (1992). Le poids d'un récipient. Etude des problèmes de mesurage en CM, *Grand N*, 65-87.
[29] Leonard F., Sackur C. (1990). Connaissances locales et triple approche : une méthodologie de recherche. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 10/2.3, 205-240.
[30] Vergnaud G. (1990). La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 10/1.2, 133-170.
[31] Serfati M. (1997). *La constitution de l'écriture symbolique en mathématiques*. Thèse de doctorat. Université Paris I.
[32] Gasquet, S. *Scripta algebraica*, CRDP de Grenoble.
[33] IREM de Strasbourg. 1992. Calcul numérique et calcul algébrique au collège. Quelles difficultés ?, in Commission inter-IREM Premier cycle (Eds.) *Des chiffres et des lettres au collège,* 147-177. IREM de Lyon.
[34] Duperret J.C., Fenice J.C. (1999). L'accès au calcul littéral et algébrique : un enjeu du collège, *Repères IREM* n° 34, 29-54.
[35] Grugeon B., (2000). Une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire : conception, exploitation et perspectives, in *L'algèbre au lycée et au collège*, pp. 5-39, IREM de Montpellier.
[36] Combier G., Guillaume J.C., Pressiat A. (1996). *Les débuts de l'algèbre au collège. Au pied de la lettre*. INRP, Paris.
[37] Hausdorff F. (1918). Auβeres Maβ and Dimension. Mathematische Annalen, n° 79, 157-179.
[38] Artigue M. (1996). Réformes et contre-réformes de l'enseignement de l'analyse au lycée (1902-1994). In Belhoste B, Gispert H & Hulin N (Eds.) *Les sciences au lycée. Un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger, ,* pp.195-216. Vuibert, INRP, Paris.
[39] Kaput, J. (1992). Technology and Mathematics Education, in D. Grouws (Ed.) *Handbook of research in mathematics teaching and learning,* 515-556. Macmillan, New York.
[40] Hubbard J., West B. (1999). *Equations différentielles et systèmes dynamiques*. Traduction et adaptation de V. Gautheron. Cassini, Paris.
[41] Legrand M. (1993). Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse. *Repères IREM* n° 10, 123-159.
[42] Artigue M. et als. 1989. Procédures différentielles dans les enseignements de mathématique et de physique au niveau du premier cycle universitaire. Brochure n° 74 , IREM Paris 7.
[43] Artigue M. et Rogalski M. 1990. Enseigner autrement les équations différentielles en DEUG, in Commission Inter-IREM Université (Eds.), *Enseigner autrement les mathématiques en DEUG première année*. IREM de Lyon.
[44] Groupe AHA (Eds.). (1999). *Vers l'infini pas à pas. Approche heuristique de l'analyse. Manuel de l'élève.* De Boeck Editeur, Bruxelles.

[45] Groupe AHA (Eds.). (1999). *Vers l'infini pas à pas. Approche heuristique de l'analyse. Guide méthodologique*. De Boeck Editeur, Bruxelles.
[46] ERMEL (Eds.) (1999). *Vrai ? Faux ?... On en débat !* INRP, Paris.